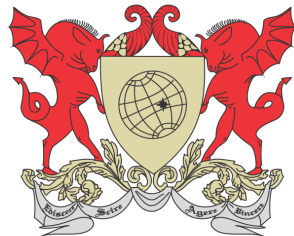


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO



AUGUSTO COSTA VIANA

ALGUMAS CARACTERIZAÇÕES DE GRAFOS
PLANARES

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2018

AUGUSTO COSTA VIANA

**ALGUMAS CARACTERIZAÇÕES DE GRAFOS
PLANARES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Copie o arquivo

`ficha_catalografica_ufv.pdf`

fornecido pela UFV para a pasta do trabalho e a ficha catalográfica será automaticamente incluída aqui.

AUGUSTO COSTA VIANA

**ALGUMAS CARACTERIZAÇÕES DE GRAFOS
PLANARES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

APROVADA: 14 de dezembro de 2018.

Luís Felipe Gonçalves Fonseca
(Orientador)

Mehran Sabeti

Luiz Gustavo Perona Araújo

Dedicatória

Dedico o presente trabalho a minha meus pais Juventino Eustáquio Viana e Marisa Helena Lopes da Costa Viana, que não mediram esforços para me ajudar nessa etapa tão importante da minha vida, pela educação que me foi dada e por fazerem sempre o possível e o impossível para que eu realizasse o sonho de me formar em uma universidade de qualidade e aos meus irmãos Marcos Costa Viana e Paula Costa Viana que me impulsionaram todos os dias com palavras de apoio.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a deus por permitir que tudo isso acontecesse, pela ajuda em cada etapa desse trabalho e por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Aos meus pais, irmãos pelo amor incondicional, apoio, incentivo nas horas difíceis e por acreditarem sempre na minha capacidade de superar os desafios.

Sou grato também aos meus amigos formado durante o curso, pelas alegrias, tristezas e dificuldades compartilhadas.

Agradeço ao meu orientador, Prof Dr. Luís Felipe Gonçalves Fonseca, por ter aceitado me orientar, pelo apoio, incentivo e pelo papel fundamental que cumpriu na minha formação como Licenciado em Matemática.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram contribuíram para meu desenvolvimento profissional e pessoal.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação e me ajudaram a completar essa árdua etapa da minha vida pessoal e profissional.

Resumo

VIANA, Augusto Costa, Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2018. **Algumas caracterizações de grafos planares**. Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

A teoria dos grafos modela diversos problemas do cotidiano. Utilizando essa importante ferramenta matemática, concluiremos de forma clara e completa uma demonstração do teorema de Kuratowski. Apresentaremos também os teoremas de Wagner, Maclane e Whitney. Esses teoremas fornecem uma caracterização para os grafos, mostrando se ele é ou não um grafo planar.

Abstract

VIANA, Augusto Costa, Universidade Federal de Viçosa, December, 2018. **Some characterizations of planar graphs.** Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

Graph theory shapes many everyday problems. Using this important mathematical tool, we will conclude in a clear and complete way a demonstration of Kuratowski's theorem. We will also present the theorems of Wagner, Maclane and Whitney. These theorems provide a characterization for the graphs, showing whether or not it is a planar graph.

Sumário

1	Introdução	1
2	O que é um Grafo	4
2.1	Conceitos básicos de Grafos	4
2.1.1	Ordem e Tamanho	4
2.1.2	Grafo nulo ou vazio	4
2.1.3	Grau de um vértice	5
2.1.4	Ponte	5
2.1.5	Laço e arestas paralelas	5
2.1.6	Grafo Direcionado ou Orientado	5
2.1.7	Multigrafos	6
2.1.8	Grafos Mistos	6
2.2	Alguns conceitos importantes	6
2.2.1	Grafo Complementar	6
2.2.2	Articulação ou Vértice de Corte	7
2.2.3	Subgrafo	7
2.2.4	Bloco	8
2.2.5	Grafo Conexo	8
2.2.6	Ciclo	8
2.2.7	Passeio, Trilha e Caminho	9
2.3	Primeiro Resultado	9
2.4	Isomorfismo	9
2.5	Grafos Especiais	10
2.5.1	Grafo simétrico	10
2.5.2	Grafo completo	10
2.5.3	Grafo Regular	10
2.5.4	Grafo bipartido	11
2.5.5	Grafo bipartido completo	11
2.5.6	Grafo K-Conexo	12
2.5.7	Grafo Bipartido	12
3	Euler e as Pontes de Konigsberg	13
3.1	Grafos Eulerianos	14

3.2	O problema Chinês do Carteiro	15
3.3	Grafos e Ciclos Hamiltonianos	16
3.4	O problema do Caixeiro Viajante - PCV	17
4	Árvores e subconjuntos especiais de um grafo	20
4.1	Definições e Caracterizações	20
4.2	Árvores Geradoras	22
4.2.1	O Problema de Conexão de Peso Mínimo	22
5	Grafos Planares	23
5.1	Definições e Resultados Simples	23
5.2	Dualidade	27
5.3	Número cromático	28
5.4	O problema das 4 Cores	28
5.5	K-colorizável	29
5.6	Teorema de Kuratowski	31
5.6.1	Grafo não planar minimal	31
5.7	Subdivisão e Homeomorfismo	31
5.8	Contração de aresta	32
5.9	Menores	32
5.10	2-Base	32
5.11	Dual Combinatório	34
5.12	Subgrafo de Kuratowski	35
5.13	Mais alguns critérios de caracterização de grafos planares	40
	Bibliografia	41

Introdução

Os grafos, ajudam a resolver vários problemas na matemática. Um problema muito importante, que deu origem a toda teoria dos grafos, surgiu quando Euler foi visitar a cidade de Königsberg em meados da primeira metade do século XVIII. O problema foi proposto como um desafio pelos moradores daquela cidade. O desafio, conhecido como o “Problema das Sete Pontes de Königsberg”, consistia em saber se era possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas e retornar ao ponto inicial. Diziam-se que os habitantes da cidade tentavam fazer o percurso. Como as suas tentativas eram sempre falhas, muitos deles acreditavam que não era possível encontrar tal percurso. Leonhard Euler, em 1736, mostrou que realmente não era possível.

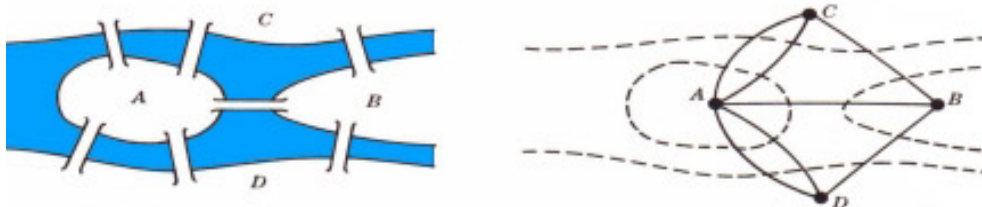


Figura 1.1: Sete pontes de Königsberg, [3].

Os grafos são estruturas abstratas que representam um conjunto de elementos denominados vértices e suas relações de interdependência denominadas arestas. Os grafos podem ser utilizados na representação e resolução de vários problemas em topologia, programação, lógica, cartografia, entre outras. Abaixo temos alguns exemplos de grafos.

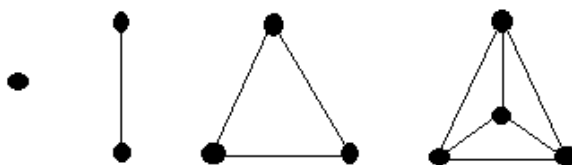


Figura 1.2: Exemplos de grafos.

Um tipo de grafo que é muito importante, pois é através dele que conseguimos ver claramente a resolução do “Problema das Sete Pontes de Königsberg”, são os grafos eulerianos. Definimos grafo euleriano se pudermos percorrer cada aresta uma única vez partindo de um vértice e a ele retornando. Se o grafo não é euleriano, mas pudermos começar num ponto qualquer e chegar a outro, ele será dito semieuleriano.

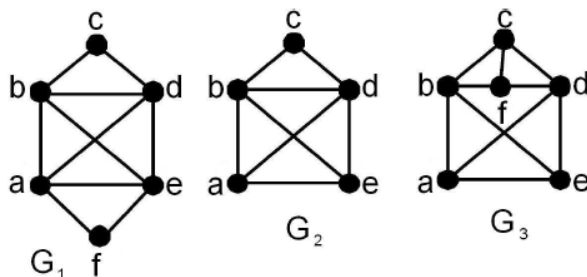


Figura 1.3: G_1 é euleriano e G_2 é semieuleriano, [7].

Na figura acima, G_1 é euleriano, G_2 é semieuleriano e G_3 não é euleriano nem semieuleriano.

Euler, inclusive, demonstrou que um grafo conexo G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau (número de vezes que as arestas incidem sobre um vértice qualquer) par.

Utilizando um grafo para representar as pontes de Königsberg, ele observou que número de passagens de uma margem para uma ilha, ou entre duas ilhas era sempre ímpar.

Um problema importante que usa o conceito de grafo euleriano é o problema Chinês do Carteiro, que consiste em minimizar o esforço de um carteiro que percorre todas as ruas de uma cidade. Se o grafo em questão é euleriano, não há problema. Mas se este não for o caso, teremos que eulerizar o grafo. A ideia é fazer o carteiro percorrer ruas repetidas de forma econômica. O problema não é simples, mas hoje há algoritmos que produzem resultados com bastante eficiência. É um problema bastante estudado devido à economia que uma boa solução pode gerar.

Definimos que grafos planares são grafos que admitem uma representação gráfica em que as arestas só se encontrem (possivelmente) nos vértices a que são incidentes. Exemplos clássicos de grafos planares são dados pelos grafos que representam os poliedros platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

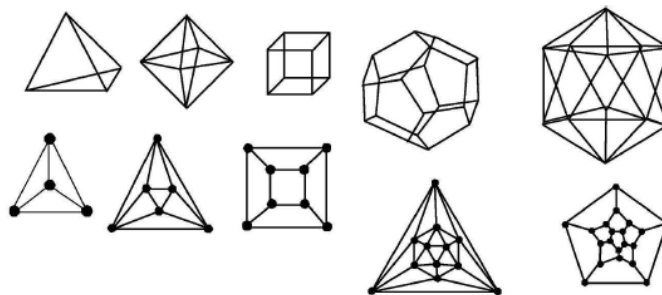


Figura 1.4: Grafos planares, [7].

Mas aí vem uma clássica pergunta: será que todos os grafos são planares? A resposta para isso é não, nem todos os grafos são planares. Por exemplo, K_5 e $K_{3,3}$ são exemplos clássicos de grafos completos (grafo onde todo par de vértice é ligado por uma aresta) não planares.

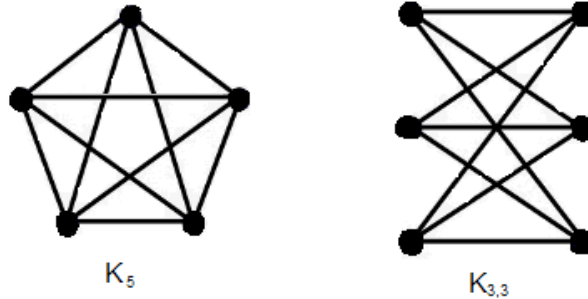


Figura 1.5: Grafos não planares.

Na parte final desse trabalho, demonstraremos o teorema de Kuratowski e apresentaremos os teoremas de Wagner, Maclane e Whitney. As definições necessárias para do teorema de Wagner, Maclane e Whistney serão apresentadas no decorrer deste trabalho e as do Teorema de Kuratowski serão apresentadas a seguir.

Definimos que um grafo G' é um subgrafo de um grafo G se o conjunto de vértices de G' é um subconjunto do conjunto de vértices G e o conjunto de arestas de G' é um subconjunto do conjunto de arestas de G . Por fim temos que um grafo G' é dito homeomorfo ao grafo G se G' puder ser obtido de G por sucessivas operações de subdivisão (adição de vértices de grau dois). O teorema diz que um grafo é planar se não contiver subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

O que é um Grafo

Definição 2.1: Um grafo é uma estrutura abstrata que representa um conjunto de elementos denominados vértices e suas relações de interdependência denominadas arestas.

Será usado a notação $G(A(G),V(G))$, sendo que $A(G)$ é o conjunto de arestas e $V(G)$ o conjunto de vértices.

Exemplos:

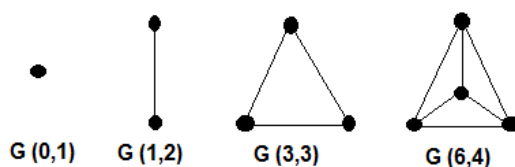


Figura 2.1: Exemplos de grafos.

2.1 Conceitos básicos de Grafos

2.1.1 Ordem e Tamanho

A ordem de um grafo é o número de vértices que ele possui, e o tamanho de um grafo é o número de ligações que ele possui.

2.1.2 Grafo nulo ou vazio

Um grafo G é nulo ou vazio quando o conjunto de arestas $A(G)$ é vazio.



Figura 2.2: Exemplo de grafo nulo ou vazio.

2.1.3 Grau de um vértice

O número de vezes que as arestas incidem sobre um vértice V é chamado **grau do vértice** v , simbolizado por $d(v)$. Na figura abaixo, os números representam os graus de cada vértice.

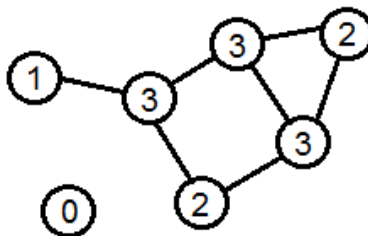


Figura 2.3: Representação dos graus de cada vértices.

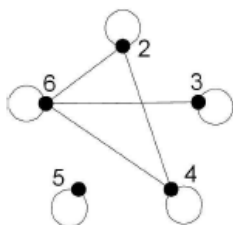
2.1.4 Ponte

Uma **ponte** é uma aresta cuja remoção desconecta o grafo.

2.1.5 Laço e arestas paralelas

Uma aresta que liga um vértice a ele mesmo é chamada de laço.

Arestas que representam ligações diferentes entre vértices idênticos são chamadas de arestas paralelas.



(a) Figura 2.3.1: Laço, [7].



(b) Figura 2.3.2. Arestas Paralelas.

2.1.6 Grafo Direcionado ou Orientado

Um grafo é dito direcionado ou orientado quando o sentido das ligações entre os vértices é importante. Nesse caso, as arestas possuem um sentido marcado por uma seta e recebem o nome de arcos (grafo orientado).

A distinção do sentido dos arcos no conjunto $A(G)$ obriga sua representação por pares ordenados. A fim de diferenciar arestas de arcos, pode-se utilizar a notação com vírgula (1,2) para representar pares ordenados dos arcos e com um traço para representar as arestas (1-2).

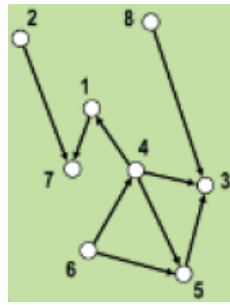


Figura 2.5: Grafo direcionado ou orientado, [11].

2.1.7 Multigrafos

É um grafo não direcionado que possui no mínimo duas arestas paralelas. Além disso, um grafo direcionado que possui dois ou mais arcos de mesma direção ligando um mesmo par de vértices é denominado multigrafo direcionado.

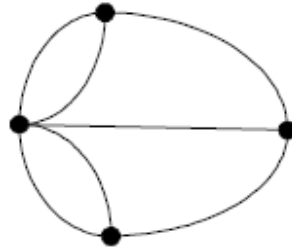


Figura 2.6: Multigrafo, [7].

2.1.8 Grafos Mistos

Definimos um grafo misto como um grafo que possui simultaneamente arcos e arestas.

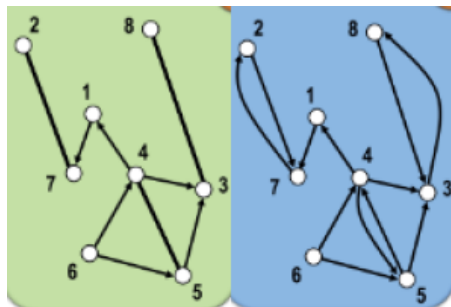


Figura 2.7: Grafos mistos, [11].

2.2 Alguns conceitos importantes

2.2.1 Grafo Complementar

Dado um grafo G , orientado ou não, dizemos que o seu grafo complementar G' é o grafo que contém as ligações que não estão em G .

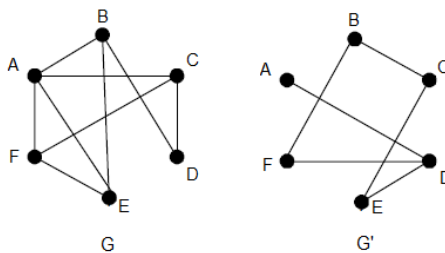


Figura 2.8: Grafo complementar.

2.2.2 Articulação ou Vértice de Corte

Para definir o que é articulação ou vértice de corte, vamos definir inicialmente o que é grafo conexo e componente conexa. Um grafo é conexo se qualquer par de pontos é ligado por ao menos um caminho. As componentes conexas podem ser vistas como as classes de equivalência da relação: $x \simeq y$ se, e somente se, existe um caminho ligando x a y .

Um vértice v de um grafo G simples não-trivial (que possui mais de um vértice) é uma articulação se a remoção de v resulta no aumento do número de componentes conexas de G .

Sendo (1) o grafo G , tem-se que em (2), com a remoção de um vértice, aumentou-se o número de componentes conexas, portanto é uma articulação. Já em (3) não é uma articulação, pois a remoção do vértice não aumentou o número de componentes conexas. Como pode ser visto na imagem abaixo.

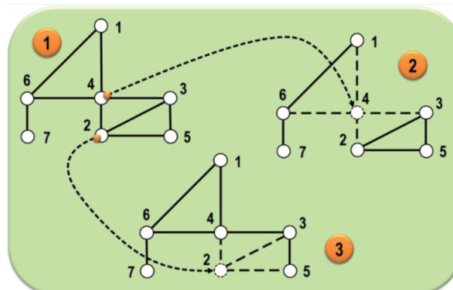


Figura 2.9: No número 2 temos uma articulação, [11].

2.2.3 Subgrafo

Definição 2.2: Informalmente, um subgrafo H de um grafo G é um “pedaço” deste. Formalmente, dizemos que um grafo H é um subgrafo de um grafo G se o conjunto de vértices de H é um subconjunto do conjunto de vértices G e o conjunto de arestas de H é um subconjunto do conjunto de arestas de G .

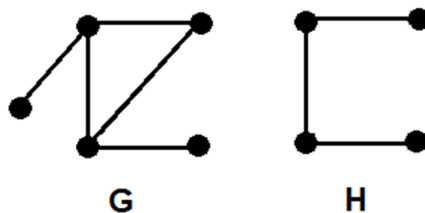


Figura 2.10: H é um subgrafo de G.

2.2.4 Bloco

É um grafo conexo que não possui articulação. Isto é, não há vértice em G cuja remoção provoque aumento do número de componentes conexas de G.

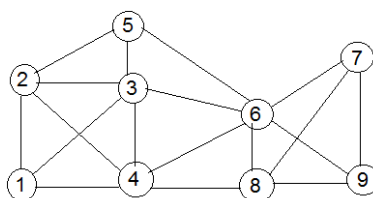


Figura 2.11: Exemplo de Bloco.

2.2.5 Grafo Conexos

Dizemos que um grafo é conexo se qualquer par de pontos é ligado por ao menos um caminho.

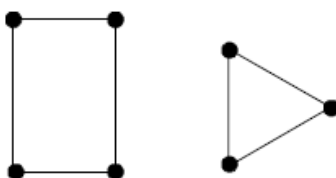


Figura 2.12: Exemplo de grafo conexo, [7].

2.2.6 Ciclo

Um ciclo é um grafo conexo regular de grau 2. A notação é C_n

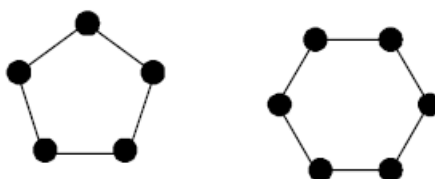


Figura 2.13: Exemplo de ciclo, [7].

2.2.7 Passeio, Trilha e Caminho

Um **passeio** é uma sequência de arestas do tipo $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{s-1}v_s$; s é o **comprimento** do passeio. Se todas as arestas do passeio são distintas, o passeio é chamado **trilha**; se $v_0 = v_s$ o passeio é uma **trilha fechada**. Se, além das arestas, todos os vértices são distintos então temos um **caminho** e se $v_0 = v_s$ temos um ciclo.

2.3 Primeiro Resultado

O teorema a seguir, apesar de ser simples, é importante, pois obtemos uma relação entre a soma dos graus dos vértice de um grafo qualquer com o dobro do número de arestas.

Teorema 2.1: Para todo grafo G vale

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.m.$$

Isto é: “A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas.”

Demonstração. Quando contamos os graus dos vértices, estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

□

Corolário 2.1: Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar

Demonstração. Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar, a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto, é um número par.

□

2.4 Isomorfismo

Definição 2.3: Dois grafos G_1 e G_2 são ditos isomorfos se existe uma correspondência entre seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências.

No exemplo abaixo, vamos estabelecer a seguinte correspondência entre os conjuntos de vértices.

$F : a-w, b-x, c-z, d-y$

Temos que os dois grafos abaixo são isomorfos, pois preservam a suas relações de adjacências.

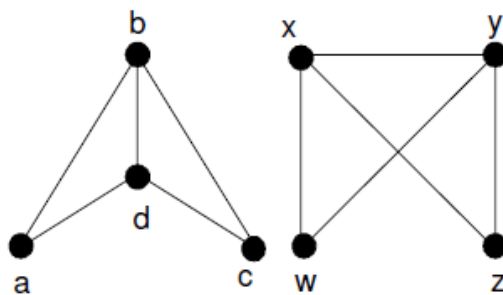


Figura 2.14: Os dois grafos são isomorfos, [7].

2.5 Grafos Especiais

Certos grafos aparecem tanto em nossa volta e possuem propriedades tão características que se torna importante apresentá-los nessa parte desse trabalho.

2.5.1 Grafo simétrico

Se um arco a tem ponta inicial i e ponta final j , dizemos que a vai de i a j . Um arco com ponta inicial i e ponta final j será denotado por (i,j) . Um grafo é simétrico se para cada arco da forma (i,j) existe um arco da forma (j,i) .

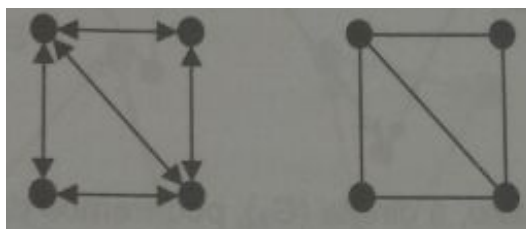


Figura 2.15: Grafos simétricos, [13].

2.5.2 Grafo completo

Um grafo completo é um grafo orientado ou não, que possui ao menos uma ligação entre cada par de vértices, ou seja, todo par de vértice é ligado por uma aresta.

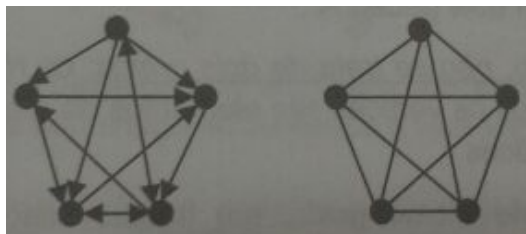


Figura 2.16: Grafos completos, [13].

2.5.3 Grafo Regular

Um grafo é regular (de grau k , ou ainda k -regular) quando todos os seus vértices têm o mesmo grau (k).

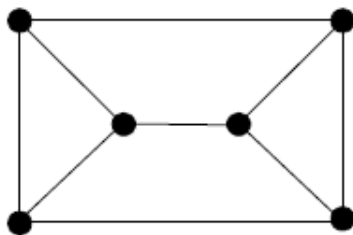


Figura 2.17: Grafo k -regular de grau 3, [7].

2.5.4 Grafo bipartido

É um grafo em que o conjunto V de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 tal que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2 . O subconjunto V_1 é dito um subconjunto independente de vértices do grafo G , pois não há arestas ligando dois vértices de V_1 . Temos também que V_2 é um subconjunto independente de vértices de G .

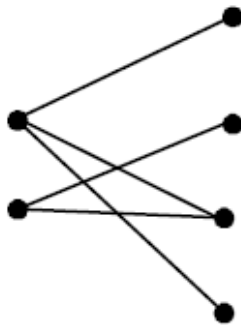


Figura 2.18: Grafo bipartido, [7].

2.5.5 Grafo bipartido completo

É um grafo bipartido em que todos os vértices de V_1 são ligados a todos os vértices de V_2 . Notação $K_{p,q}$

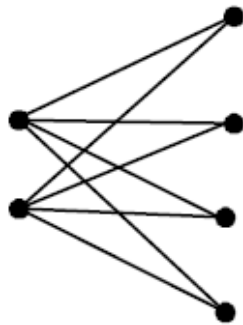


Figura 2.19: Grafo bipartido completo, [7].

2.5.6 Grafo K-Conexo

Dizemos que um grafo conexo é **k-conexo** se, ao retirarmos $k - 1$ vértices do grafo, ele continua conexo.

Exemplos:



Figura 2.20: Grafo 1-conexo, 2-conexo e 3-conexo.

2.5.7 Grafo Bipartido

Teorema 2.2: Um grafo G é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de comprimento (número de arestas) ímpar.

Demonstração. (\implies) Seja G bipartido. Se não houver ciclo em G , não há o que mostrar. Se temos um ciclo em G este alterna os vértices de V_1 e V_2 , sendo eles dois subconjuntos independentes e disjuntos. Começando de V_1 , para retornar ao ponto de partida teremos que utilizar um número par de arestas. Portanto o ciclo é de comprimento par.

(\impliedby) Podemos considerar apenas grafos conexos. Seja G um grafo sem ciclos ímpares. Vamos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos V_1 e V_2 , independentes e disjuntos. Pegando primeiramente um vértice qualquer v . O subconjunto V_1 será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento par entre v e w . O subconjunto V_2 será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre v e w . Temos ainda que os conjuntos V_1 e V_2 são disjuntos, pois se w estivesse em V_1 e V_2 ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando v a w . Esses dois caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em w , produzindo alguns ciclos. Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar (é a soma do número de arestas dos dois caminhos) isso produziria pelo menos um ciclo ímpar em G , contrariando a hipótese. \square

Euler e as Pontes de Königsberg

Um problema muito conhecido na teoria dos grafos é o problema das pontes de Königsberg. Em 1736, Euler visitou a cidade de Königsberg, na então Prússia Oriental (atualmente Kaliningrado, Rússia). A cidade, na época, era o local de moradia de diversos intelectuais conhecidos e se pode imaginar que Euler tenha se sentido atraído pelo ambiente.

O fato é que ele, ao chegar lá, tomou conhecimento de um problema que estava sendo discutido entre a intelectuais da cidade e que, embora parecesse simples, não tinha sido ainda resolvido. No Pregel, rio que corta a cidade, havia duas ilhas que, na época, eram ligadas entre si por uma ponte. As duas ilhas se ligavam ainda às margens por mais seis pontes ao todo. Por muito tempo os habitantes daquela cidade perguntavam-se se era possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas e retornar ao ponto inicial.

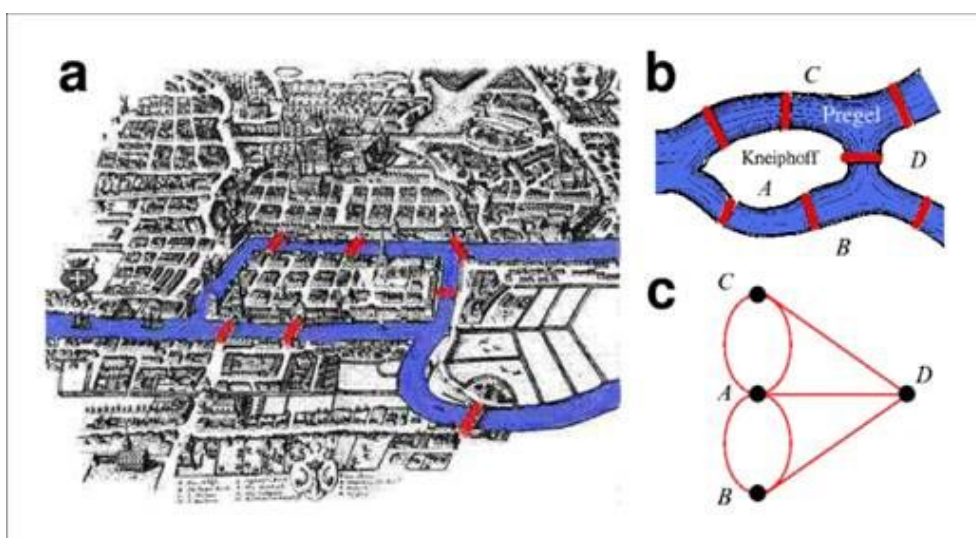


Figura 3.1: Sete pontes de Königsberg, [15].

Leonard Euler mostrou que a resposta era negativa pois observou que o número de passagens de uma margem para uma ilha, ou entre duas ilhas era sempre ímpar. Isto indica que se pode passar mas em algum momento não conseguirá retornar.

3.1 Grafos Eulerianos

Definição 3.1: Dado um grafo G com m arestas, definimos um grafo euleriano se houver uma trilha fechada de comprimento m em G , ou seja, se conseguirmos percorrer cada aresta uma, e apenas uma, única vez partindo de um vértice e a ele retornando. Se o grafo não é euleriano, mas tem uma trilha aberta de comprimento m , ele é dito semieuleriano.

Com outras palavras, podemos desenhar um grafo euleriano (ou melhor, uma representação gráfica dele) sem retirar o lápis do papel e retornando ao ponto inicial. Num grafo semieuleriano isto não é possível, ou seja, começa num ponto e termina em outro.

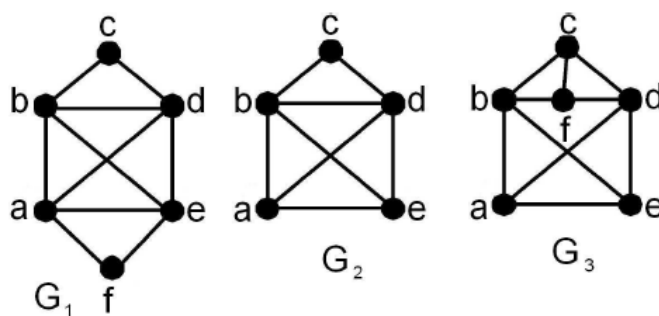


Figura 3.2: G_1 é euleriano e G_2 é semieuleriano, [7].

Na figura acima, temos que G_1 é euleriano (a trilha pode ser a-b-c-d-e-f-a-d-b-e-a), G_2 é semieuleriano (a trilha pode ser a-e-b-d-c-b-a-d-e) e G_3 não é euleriano, nem semieuleriano.

Lema 3.1: Se todo vértice de um grafo (não necessariamente simples) G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.

Demonstração. Se G contém laços ou arestas múltiplas (arestas que possuem os mesmos vértices como extremidade), não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Vamos considerar então, apenas os grafos simples. A partir de um vértice V_0 , qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um vértice qualquer, teremos duas opções, ou estaremos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado.

□

Teorema 3.1 (Teorema de Euler (Euler - 1736)): Um grafo conexo (não necessariamente simples) G de comprimento m é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.

Demonstração. (\implies) Suponhamos que G tenha uma trilha fechada de comprimento m . Cada vez que a trilha passa por um vértice, ela utiliza duas novas

arestas, uma para entrar e outra para sair. Portanto, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

(\Leftarrow) Provaremos usando indução sobre o número de arestas m do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Entre todas as trilhas fechadas em G escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T possui comprimento m , o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T . Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T , e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela nossa hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H , e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H . Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T .

□

Corolário 3.1: Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é semieuleriano se, e somente se, no máximo, dois vértices têm grau ímpar.

Demonstração. Um grafo tem exatamente dois vértices de grau ímpar se, e só se, o acréscimo de uma aresta incidente a esses vértices de grau ímpar gera um grafo com todos os vértices de grau par. Um grafo com todos os vértices de grau par tem um circuito euleriano, e retirando-se desse circuito a aresta acrescentada incidente aos vértices de grau ímpar resulta em uma trilha euleriana (que começa em um vértice de grau ímpar e termina no outro).

□

As aplicações dos percursos eulerianos se relacionam a problemas de atendimento sequencial, tais como:

- Entrega de encomendas;
- Coleta de lixo;
- Vendas em domicílio, entre outros.

3.2 O problema Chinês do Carteiro

Esse problema é uma aplicação bastante importante do conceito de grafo euleriano. Usamos um grafo valorado (as arestas possuem pesos). Este peso ou números podem representar comprimento, custo, tempo, ou o que a modelagem do problema necessitar.

O problema chinês do carteiro consiste em minimizar o esforço de um carteiro que percorre todas as ruas de uma cidade. Se o grafo em questão é euleriano, não

há problema. Mas se este não for o caso, teremos que eulerizar o grafo. Além disso, temos que o número de vértices de grau ímpar é par, logo poderemos unir pares destes vértices por novas arestas, tornando-os pares. A ideia aqui é fazer o carteiro percorrer ruas repetidas de forma econômica. O problema pode se complicar bastante, mas hoje há algoritmos que produzem resultados aproximados com bastante eficiência, como é visto nos algoritmos de Sherafat, e de Edmonds e Johnson. É um problema bastante estudado devido à economia que uma boa solução pode gerar. Vamos ilustrar o caso mais simples possível, quando o grafo é semi-euleriano, isto é, quando tem apenas dois vértices de grau ímpar.

O menor caminho entre os vértices a e b indica que o melhor meio de eulerizar o grafo é construir uma “aresta virtual” entre a e b, o que significa simplesmente percorrer o caminho $av_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4b$ (caminho qualquer entre a e b). Abaixo temos uma figura, onde os números nas arestas poderiam representar comprimento, custo ou tempo como foi dito acima, lembrando que a ideia aqui é sempre obter um caminho onde o custo seja menor entre dois vértices.

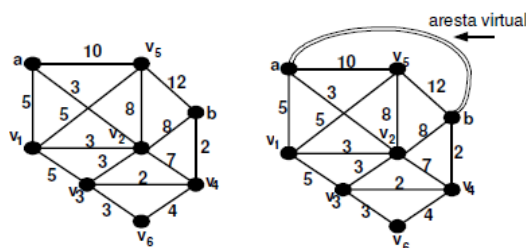


Figura 3.3: Representação de uma situação do problema Chinês do Carteiro, [7].

3.3 Grafos e Ciclos Hamiltonianos

Definição 3.2: Um problema curioso e também parecido ao dos grafos eulerianos é o de procurar em G um passeio fechado que passe por todos os vértices uma e só uma vez. Uma trilha assim teria de ser necessariamente um ciclo. Chamamos esse ciclo de ciclo Hamiltoniano. Definimos que um grafo é Hamiltoniano se ele contiver um ciclo Hamiltoniano. O nome homenageia Sir William R. Hamilton, que estudou e divulgou o problema, embora a primeira formulação tenha sido feita por Kirkman em 1885.

Exemplos:

Grafo Euleriano e Hamiltoniano

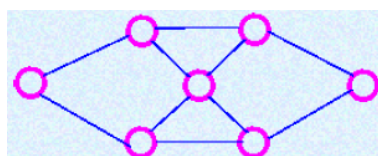


Figura 3.4: Grafo Euleriano e Hamiltoniano, [16].

Grafo Euleriano, mas que não é Hamiltoniano

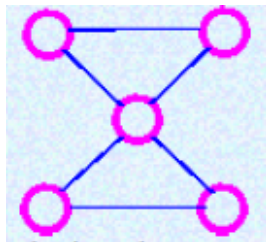


Figura 3.5: Grafo Euleriano, mas que não é Hamiltoniano, [16].

Grafo com ciclo Hamiltoniano, mas que não é Euleriano

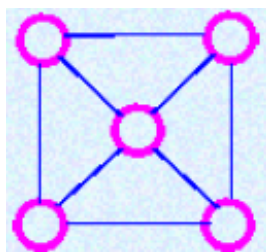


Figura 3.6: Grafo com ciclo Hamiltoniano, mas que não é Euleriano, [16].

Grafo que não é Euleriano e nem Hamiltoniano

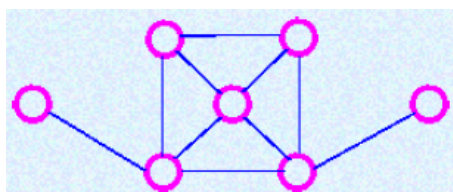


Figura 3.7: Grafo que não é Euleriano e nem Hamiltoniano, [16].

3.4 O problema do Caixeiro Viajante - PCV

Esse problema é muito importante para todo profissional da área da matemática, além de ser um dos problemas mais estudados no campo da pesquisa operacional. Este problema é uma aplicação importante do conceito de ciclo hamiltoniano, onde consiste em determinar o menor ciclo hamiltoniano. Porém, até hoje não foi encontrado um algoritmo computacionalmente eficiente para resolvê-lo. O problema consiste em tentar determinar a menor rota para percorrer uma série de cidades (visitando uma única vez cada uma delas), retornando à cidade de origem. Ele é um problema inspirado na necessidade dos vendedores em realizar entregas em diversos locais (as cidades) percorrendo o menor caminho possível, reduzindo o tempo necessário para a viagem e os possíveis custos com transporte e combustível. Trata-se de um problema de otimização que utiliza grafos.

Como exemplo, considere o seguinte problema:

Pedro está em Florestal (F) e precisa viajar para Alvinópolis (A), São Paulo (SP) e Lavras (L). A ordem das cidades a ser visitadas não importa. Para ajudá-lo a montar sua viagem, ele fez o levantamento das distâncias (Km):

	F	A	SP	L
F	-	300	650	250
A	300	-	750	400
SP	650	750	-	450
L	250	400	450	-

Figura 3.8: Levantamento das distâncias (Km) de cada cidade.

A melhor solução para esse problema é

$$F - L - SP - A - F \text{ ou } F - A - SP - L - F$$

Para encontrar a melhor rota, temos que preencher as lacunas em

$$F - _ - _ - _ - F$$

com L, SP, e A. Ou seja, temos $3! = 6$ rotas possíveis.

Observações Importantes:

- Para 4 cidades distintas, temos:

1) Para PCV simétrico, $\frac{(n-1)!}{2} = 3$

2) Para PCV assimétrico: $(n - 1)! = 6$

Observações Importantes:

- Imagine que tenhamos um computador que seja capaz de fazer 1 bilhão de adições por segundo.

- Para 20 cidades, o computador precisa apenas de 19 adições para dizer qual o comprimento de uma rota, assim temos:

$$\frac{100000000}{19} \approx 53 \text{ milhões de rotas por segundo.}$$

Para ilustrar, vamos fazer a estimativa para alguns valores de n :

N	Rotas por segundo (Aproximado)	$\frac{(n-1)!}{2}$	Tempo (Aproximado)
5	250 milhões	12	insignificante
10	110 milhões	181.440	insignificante
15	71 milhões	43,5 bilhões	10 minutos
20	53 milhões	$0,6 \times 10^{17}$	36,5 anos
25	42 milhões	$3,1 \times 10^{23}$	235 milhões de anos
26	40 milhões	$7,8 \times 10^{24}$	6 bilhões de anos

Figura 3.9: Tabela contendo cálculo de rotas para alguns valores de n .

Assim observamos que o aumento no valor do n provoca uma diminuição nas rotas por segundo com que o computador calcula, mas provoca um grande aumento no tempo total de cálculo. Assim mesmo que tivéssemos um computador muito melhor, para um número N grande (que é bem provável) ele não conseguiria resolver um problema desse tipo em um tempo hábil, mostrando para nós o porque desse problema ainda continuar sem uma solução eficiente.

Árvores e subconjuntos especiais de um grafo

4.1 Definições e Caracterizações

Definição 4.1: Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos como subgrafos.

Note que o fato de não ter ciclos faz com que a árvore seja a maneira mais “econômica” de conectar os vértices.

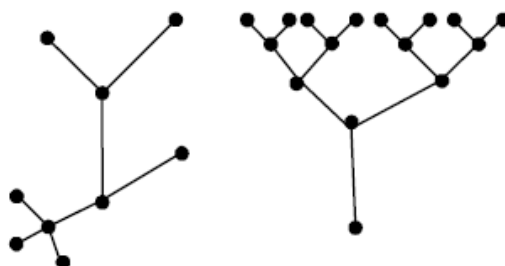


Figura 4.1: Árvores, [7].

Um grafo cujas componentes conexas são árvores é chamado de **floresta**.

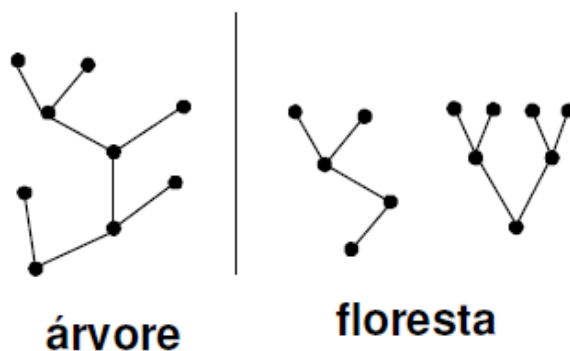


Figura 4.2: Árvore e floresta, [7].

Para um dado número de vértices n , uma árvore é o grafo conexo com menor número de arestas. Uma ponte é uma aresta cuja deleção provoca o aumento das

componentes conexas do grafo. As várias caracterizações das árvores podem ser reunidas no seguinte teorema.

Teorema 4.1: Seja T um grafo com n vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) T é uma árvore;
- (ii) T não contém ciclos e tem $n - 1$ arestas;
- (iii) T é conexo e tem $n - 1$ arestas;
- (iv) T é conexo e toda aresta é uma ponte;
- (v) Todo par de vértices de T é ligado por um único caminho;
- (vi) T não contém ciclos, mas a adição de uma aresta produz um único ciclo.

Demonstração. (i) \implies (ii): Pela definição de árvore, T não contém ciclos. Portanto, a retirada de uma aresta uv separa u de v , e o grafo é separado em um par de árvores T' e T'' com n' e n'' vértices, respectivamente, tais que $n = n' + n''$. Por indução, o número de arestas de T' é $n' - 1$, e o número de arestas de T'' é $n'' - 1$. Acrescentando a aresta uv , concluímos que o número de arestas de T é, portanto, $(n' - 1) + (n'' - 1) + 1 = n - 1$.

(ii) \implies (iii): Se T fosse desconexo, cada componente seria uma árvore. Por indução, o número de arestas em cada componente é inferior em uma unidade ao número de vértices e o número total de arestas seria inferior a $n - 1$.

(iii) \implies (iv): A retirada de qualquer aresta separa o grafo, pois $n - 2$ arestas são insuficientes para conectar o grafo.

(iv) \implies (v): Se existisse mais de um caminho entre dois vértices, o grafo teria um ciclo e haveria uma aresta que não separaria o grafo.

(v) \implies (vi): Se T contivesse um ciclo, haveria um par de vértices ligado por mais de um caminho. A adição de uma aresta uv , concatenada com o caminho (único) entre u e v , produz um ciclo. Se este ciclo não fosse único, a retirada da aresta uv deixaria dois caminhos distintos entre u e v .

(vi) \implies (i) : Basta mostrar que T é conexo. Se T fosse desconexo, uma aresta ligando duas componentes não produziria um ciclo.

□

4.2 Árvores Geradoras

Definição 4.2: Uma árvore geradora de um grafo G é um subgrafo conexo e acíclico (não possui ciclos) que possui todos os vértices originais de G e um subconjunto das arestas originais de G . Em outras palavras, uma árvore geradora é um subgrafo gerador que é uma árvore.

Exemplo:

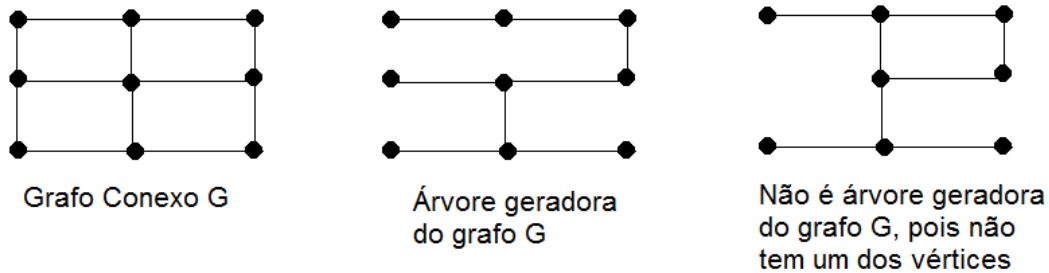


Figura 4.3: Exemplo de árvore geradora.

O algoritmo de Kruskal é um algoritmo em teoria dos grafos que busca uma árvore geradora mínima para um grafo conexo com pesos (conjunto de números associados aos vértices ou arestas, onde o significado vai depender do problema). Isto significa que ele encontra um subconjunto das arestas que forma uma árvore que inclui todos os vértices, onde o peso total, dado pela soma dos pesos das arestas da árvore, é minimizado. O algoritmo de Kruskal é um exemplo de um algoritmo guloso (também conhecido como ganancioso ou greedy).

4.2.1 O Problema de Conexão de Peso Mínimo

Teorema 4.2: O algoritmo de Kruskal fornece uma solução ótima para o problema da conexão de peso mínimo.

Demonstração. O algoritmo, evidentemente, fornece uma árvore geradora T . Suponhamos que T não tenha peso mínimo, isto é, existe uma árvore geradora T' tal que o peso de T' é menor do que o peso de T . Seja e a primeira aresta escolhida para T que não pertence a T' . Se adicionarmos e a T' , obtemos um ciclo que contém uma aresta e_k que não está em T . Retiramos a aresta e_k e temos uma árvore T'' com peso menor que T . Mas neste caso, esta aresta e_k teria sido escolhida pelo algoritmo no lugar de e , o que mostra que o algoritmo constrói efetivamente uma árvore de menor peso.

□

Grafos Planares

5.1 Definições e Resultados Simples

Definição 5.1: Um grafo é dito planar se pode ser desenhado no plano de forma que suas arestas se interceptam apenas nos vértices.

Exemplos clássicos de grafos planares são dados pelos grafos que representam os poliedros platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

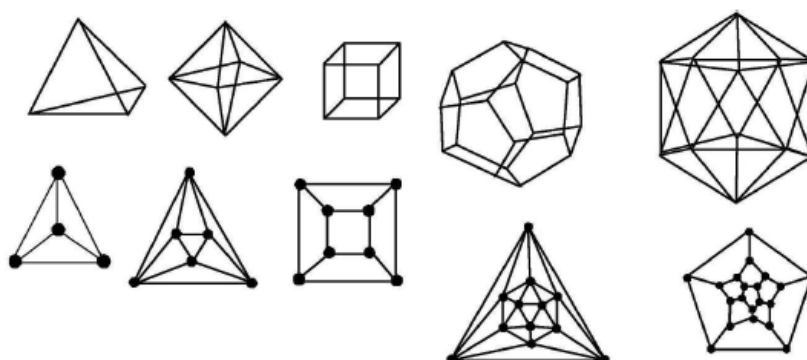


Figura 5.1: Exemplos de grafos planares, [7].

Como veremos mais tarde, nem todos os grafos são planares, K_5 e $K_{3,3}$ são exemplos clássicos de grafos não planares.

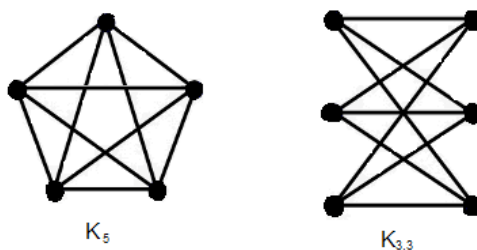


Figura 5.2: Exemplos de grafos não planares.

Para grafos planares, vale a relação de Euler para poliedros convexos.

Teorema 5.1 (Teorema de Euler): Num grafo planar conexo vale $f - m + n = 2$, sendo $f =$ faces, $m =$ arestas e $n =$ vértices.

Demonstração. Demonstraremos este teorema por indução sobre o número de arestas. Vamos tomar um grafo conexo qualquer. Se esse grafo for uma árvore, temos $f - m + n = 1 - (n - 1) + n = 2$. Se houver um ciclo, retiramos uma aresta do ciclo, e o grafo fica com uma face a menos, mas pela hipótese de indução a relação vale para o novo grafo. Temos então $(f - 1) - (m - 1) + n = 2$ e, portanto, $f - m + n = 2$.

□

Teorema 5.2: Seja \mathbf{P} um poliedro convexo. Se todas as suas faces são polígonos congruentes e de cada vértice partem a mesma quantidade de arestas, então \mathbf{P} é um dos sólidos a seguir: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro ou icosaedro.

Demonstração. Seja p o número de arestas de cada face (equivalentemente, o número de vértices de cada face) e q o número de arestas de cada um dos V ângulos poliédricos. Observe que: $pF = 2A$.

De fato, cada face do poliedro possui p lados, como temos F faces, temos um total de pF lados de faces, como cada lado pertence a exatamente duas faces, então o número de arestas do poliedro é $\frac{pF}{2}$, ou seja, $pF = 2A$.

Além disso, $2A = qV$, pois, cada um dos V ângulos poliédricos tem q arestas ($q \geq 3$), como cada aresta contém dois vértices, então o número de arestas do poliedro é $\frac{qV}{2}$, ou seja, $qV = 2A$. Portanto, $pF = 2A = qV$ (*)

Pelo Teorema 6.1 (teorema de Euler para poliedros convexos ou grafos planares conexos) temos: $V - A + F = 2$ (**).

De (*) temos que $F = \frac{2A}{p}$ e $V = \frac{2A}{q}$.

Substituindo esses valores em (**), obtemos: $\frac{2A}{p} - A + \frac{2A}{q} = 2$

Dividindo a igualdade por $2A$ e somando $\frac{1}{A}$ em ambos os lados, temos:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \implies \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} (***)$$

Como A é estritamente positivo, temos

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$$

Sabemos que $p \geq 3$ e $q \geq 3$. Notemos, porém, que se p e q fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos: $q \geq 4$. Portanto $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{4}$. Como $p > 3$, $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{4}$.

Assim temos:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2} \implies \frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \leq 0.$$

o que contraria a igualdade (***), pois A é um número positivo.

Concluimos então que, nos poliedros, $q = 3$ ou $p = 3$. Vamos analisar esses casos:

i) Para $q = 3$.

Em (***) vem:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{p} > \frac{1}{6} \implies p < 6.$$

Então, $p = 3$ ou $p = 4$ ou $p = 5$ (respectivamente faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais, por conta do número de arestas de cada um dos ângulos poliedricos).

ii) Para $p = 3$.

Em (***):

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \implies \frac{1}{q} > \frac{1}{6} \implies q < 6.$$

Então, $q = 3$ ou $q = 4$ ou $q = 5$.

Portanto, concluimos que os poliedros são determinados pelos pares (p, q) , sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes de poliedros.

Fica ao cargo do leitor provar as seguintes identidade decorrente de (*) e (**):

$$V = \frac{4p}{4-(p-2)(q-2)}.$$

$$A = \frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)}.$$

$$F = \frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}.$$

Assim, temos as seguintes situações:

(3,3) $\implies F = 4$, logo temos um tetraedro;

(4,3) $\implies F = 6$, logo temos um hexaedro ou cubo;

(3,4) $\implies F = 8$, logo temos um octaedro;

(5,3) $\implies F = 12$, logo temos um dodecaedro;

(3,5) $\implies F = 20$, logo temos um icosaedro.

□

Teorema 5.3 (Teorema): Num grafo planar conexo G vale $m \leq 3.n - 6$. A igualdade vale se G é maximal planar.

Demonstração. Se por acaso formos contar as arestas de cada face, contaremos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face tem no mínimo 3 arestas temos:

$$3.f \leq 2.m.$$

Substituindo na fórmula de Euler:

$$f - m + n = 2,$$

$$3.f - 3m + 3n = 6,$$

$$2.m - 3.m + 3.n \geq 6,$$

$$m \leq 3.n - 6.$$

□

Este teorema nos dá outra demonstração de que K_5 não é planar. De fato, K_5 (e de resto todos os grafos completos com mais do que 4 vértices) não obedece à relação acima, pois $10 > 3 \cdot 5 - 6$.

Um problema interessante de se falar, quando falamos agora do grafo $K_{3,3}$ é o chamado **problemas das três casas**, que indaga se dadas três casas (A,B e C) é possível conectá-las aos fornecedores de água, gás e eletricidade sem cruzar as linhas?

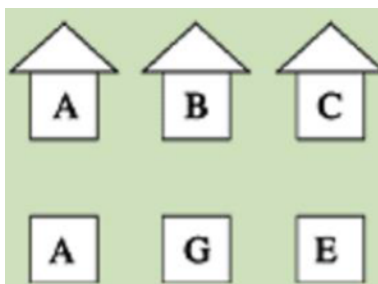


Figura 5.3: Problemas das três casas, [11].

Notemos que o grafo $K_{3,3}$ não pode ser desenhado no plano sem que ocorra interseção de arestas.

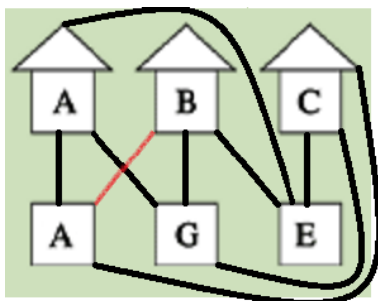


Figura 5.4: Problemas das três casas, [11].

Assim, será apresentado um teorema que prova que esse grafo não é planar.

Teorema 5.4 (Teorema): Num grafo planar bipartido conexo G vale

$$m \leq 2.n - 4.$$

Demonstração. Observamos que um grafo bipartido só tem ciclos pares. Cada face tem no mínimo 4 arestas.

$$4.f \leq 2.m,$$

Substituindo na fórmula de Euler temos:

$$4f - 4m + 4n = 8,$$

$$2m - 4m + 4n \geq 8,$$

$$m \leq 2.n - 4.$$

□

Assim, pelo teorema 5.4, podemos ver que $K_{3,3}$ não é planar, pois $9 > 2.6 - 4$.

É fácil perceber que qualquer grafo que tenha um K_5 ou $K_{3,3}$ como subgrafo não é planar (pois pelo menos essa “parte” do grafo não poderá ser desenhada de forma planar).

5.2 Dualidade

O Dual G^D de um grafo simples planar G é o grafo construído da seguinte maneira:

(i) A cada face de G associamos um vértice em G^D

(ii) A cada aresta de G (que separa duas faces) associamos uma aresta em G^D ligando os vértices correspondentes às faces.

Um bom exemplo são os sólidos platônicos apresentados. O cubo é o dual do octaedro, o icosaedro é o dual do dodecaedro e o tetraedro é o dual dele mesmo (autodual). Esses duais correspondem aos duais da geometria clássica.

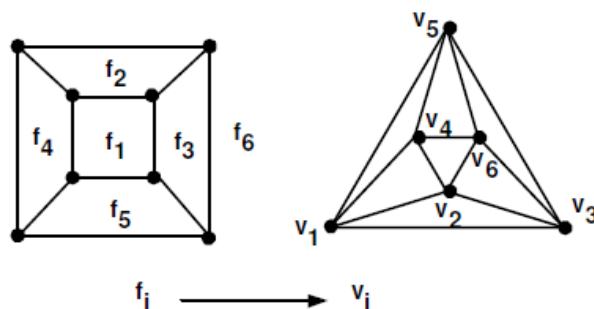


Figura 5.5: Correspondência entre as faces do cubo e os vértices do octaedro, [7].

5.3 Número cromático

Definição 5.2: Definimos o menor número de cores para colorir um grafo G qualquer de **número cromático**, denotado por $\chi(G)$.

Exemplo:

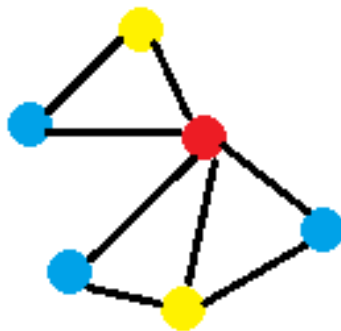


Figura 5.6: Podemos colorir esse grafo com apenas 3 cores distintas.

Em relação a figura acima, podemos colorir os vértices com 6 cores (uma para cada vértice), mas o menor número possível de cores é 3. No caso $\chi(G) = 3$.

Observação. Não precisamos efetivamente “colorir” os vértices, basta atribuir um número ou um símbolo aos vértices.

5.4 O problema das 4 Cores

Colorir um mapa é colorir as regiões de maneira que regiões fronteiriças não sejam coloridas com a mesma cor. Usando a dualidade podemos formular o teorema em forma de coloração de vértices.

O problema demorou um século para ser resolvido. Em 1976, Appel, Haken e Koch, com o auxílio de 1200 horas do computador mais rápido de sua época, executando mais do que 10^{10} operações computacionais, provaram o teorema. Embora a teoria envolvida seja profunda muitos consideram esta “a mais feia prova da matemática”. Em 1852, Frederick Guthrie, aluno de Augustus de Morgan, trouxe a este um problema proposto por seu irmão Francis Guthrie.

O teorema das quatro cores é um teorema de formulação e conceitualização simples, mas de demonstração bem complexa.

Teorema 5.5 (Teorema das 4 cores formulação): Num grafo planar G tem-se que $\chi(G) \leq 4$.

Demonstração. Pode ser encontrado em [17].

□

Lema 5.1: Num grafo planar há pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.

Demonstração. Sabemos que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.m$. Vamos supor que $d(v) > 5, \forall v \in V$. Sendo v número de vértices de G , temos

$$6.n \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.m.$$

Mas já mostramos que em todo grafo planar vale $m \leq 3.n - 6$. Então, $2m \leq 6.n - 12$, o que nos dá

$$6.n \leq 6.n - 12,$$

que é impossível. Logo, em todo grafo planar existe um vértice com grau menor ou igual a 5. \square

5.5 K-colorizável

Na Teoria dos Grafos, quando queremos colorir os vértices de um grafo, atribuímos números ou outro símbolo qualquer a cada um deles. De maneira geral, se podemos utilizar k cores, números ou símbolos para colorir os vértices de um grafo G , dizemos que temos uma k -coloração de G . Se as cores de vértices adjacentes são sempre diferentes dizemos que a coloração é própria e, ainda, se o grafo admitir uma coloração- k própria, ele é chamado k -colorizável. Vale observar que o número k se refere à quantidade de cores disponíveis, isso não significa que todas elas devam ser utilizadas. Por exemplo, se um grafo é 6-colorizável, também será 7-colorizável, pois podemos acrescentar a sétima opção ao nosso conjunto de cores disponíveis mesmo que não a utilizemos.

Teorema 5.6 (Teorema das 5 cores): Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Demonstração. Para grafos com cinco ou menos vértices, o teorema é obviamente válido, já que podemos atribuir a cada vértice uma cor diferente.

Hipótese de indução: Vamos supor que o resultado seja válido para os grafos com n vértices.

Considere um grafo planar G com $n + 1$ vértices. Pelo Lema 6.1, G contém um vértice v com grau menor ou igual a 5. Considere $G' = G - v$. Repare que G' também é planar e possui n vértices. Usando nossa hipótese de indução, G' pode ser colorido com 5 cores. Agora queremos estender essa coloração a G , colorindo o vértice v . Se, entre os vizinhos de v , foram utilizadas apenas 4 cores diferentes, isto significa que disponibilizamos de uma quinta cor para atribuir a v , tornando G 5-colorizável.

Se o grau do vértice v é $d(v) = 5$ e seus 5 vizinhos possuem cores diferentes, não temos como associar uma cor a v , pois, com apenas 5 cores, a cor de v necessariamente será igual a de algum de seus vizinhos. Dessa maneira, para

atribuirmos uma cor ao vértice v que não seja a mesma de seus vizinhos, deveremos recolorir alguns vértices.

Suponhamos que todo vértice de G , exceto v , esteja colorido com os elementos do conjunto $1, 2, 3, 4, 5$, que vamos chamar de cores. Vamos supor ainda que cada vizinho de v esteja colorido com uma cor diferente dentre as disponíveis. Sejam u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 os vértices adjacentes a v e, sem perda de generalidade, vamos considerar que u_1 esteja colorido com a cor 1, u_2 com a cor 2 e assim por diante. Além disso, por questão de organização, vamos considerar os vizinhos de v ordenados em sentido horário, conforme ilustrado na abaixo.

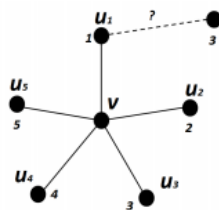


Figura 5.7: Vértice v e seus vizinhos, [6].

Podemos trocar a cor de um dos vizinhos de v . Podemos mudar, por exemplo, a cor de u_1 de 1 para 3. Agora teríamos a cor 1 disponível para colorirmos o vértice v . O problema é que u_1 pode ter um vizinho que já tenha a cor 3 e, nesse caso, não obteríamos uma coloração própria para G .

Vamos então tomar o subgrafo de G induzido por todos os vértices de cores 1 ou 3. Chamemos de $H_{1,3}$ esse subgrafo. Repare que os vértices u_1 e u_3 estarão em $H_{1,3}$, mas não sabemos se estão na mesma componente. Se estiverem em componentes separadas, não há caminho entre u_1 e u_3 e, assim, podemos permutar as cores 1 e 3 na componente que contém u_1 . Isso nos daria uma coloração própria para G' em que a cor 1 não mais estaria entre os vizinhos de v e, assim, poderíamos atribuir a v a cor 1.

Se u_1 e u_3 estiverem na mesma componente, a permuta entre as cores 1 e 3 não nos disponibiliza nenhuma cor para v . Então, vamos proceder como anteriormente, mas agora tentando recolorir u_2 com a cor 4. Tomemos $H_{2,4}$, subgrafo de G induzido nos vértices de cor 2 ou cor 4. Se u_2 e u_4 estiverem em componentes separadas de $H_{2,4}$, podemos permutar as cores na componente em que está u_2 , por exemplo. Essa coloração modificada ainda é própria de G' e poderíamos colorir v com a cor 2 obtendo, assim, uma 5-coloração própria para G .

O problema é que, tal como antes, talvez u_2 e u_4 estejam na mesma componente de $H_{2,4}$. Nesse caso, a simples permuta das cores 2 e 4 ainda não nos permite uma coloração própria para G . Se u_2 e u_4 estão na mesma componente, existe um caminho Q de u_2 até u_4 , onde os vértices estão coloridos com as cores 2 e 4. Da mesma forma existe um caminho P entre u_1 e u_3 com vértices coloridos com as cores 1 e 3. Logo, P e Q não têm vértices em comum. Notemos que o caminho P , acrescentado de v , nos dá um ciclo, com u_2 na região interior e u_4 na região exterior ao ciclo, como mostra a figura 6.7. Assim, Q , ao passar de u_2 , na região interior, para u_4 , na região exterior, cruzaria com P . Mas isso não pode

ocorrer, porque G é planar e, portanto, não possui cruzamento de arestas. Logo, u_2 e u_4 estão em componentes separadas de $H_{2,4}$ e, então, podemos recolorir a componente que contém u_2 , por exemplo, disponibilizando a cor 2 para que possamos atribuí-la ao vértice v , encontrando, assim, uma 5-coloração própria para G , o que demonstra o teorema.

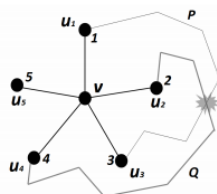


Figura 5.8: Se G é planar, P e Q não se cruzam, [6].

□

5.6 Teorema de Kuratowski

5.6.1 Grafo não planar minimal

Definição 5.3: Um grafo não planar minimal é um grafo não planar G tal que qualquer subgrafo próprio do G é planar.



Figura 5.9: Grafo não planar minimal, [16].

5.7 Subdivisão e Homeomorfismo

Definição 5.4: Dado um Grafo G qualquer, se adicionarmos vértices a esse grafo de forma que esses vértices sejam de grau dois, vamos obter um grafo G' que será chamado de **subdivisão** de G . Um grafo G' qualquer será dito **homeomorfo** ao grafo G se G' puder ser obtido por G a partir sucessivas operações de subdivisão.

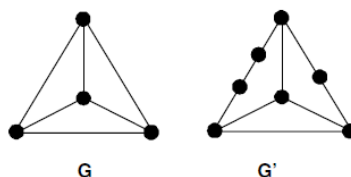


Figura 5.10: Representação de subdivisão e homeomorfismo, [7].

5.8 Contração de aresta

Definição 5.5: Seja G um grafo e e uma aresta de G com $e = xy$ (vértices da aresta e). Suponha w um ponto que não é vértice de G . A contração da aresta e em G' (notação G/e) é um grafo obtido por:

1. Remoção da aresta e ,
2. Remoção dos vértices x e y com substituição por w ,
3. O vértice w é vizinho aos vizinhos de x e aos vizinhos de y

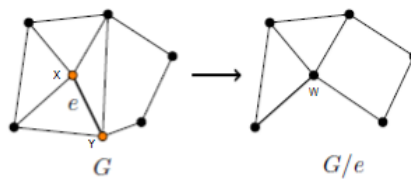


Figura 5.11: Exemplo de contração da aresta e , [20].

5.9 Menores

Definição 5.6: Um grafo H é chamado de menor de um grafo G quando esse é obtido de G por sucessivas operações de redução dos seguintes tipos:

1. eliminação de arestas,
2. contração de aresta,
3. exclusão de um vértice isolado.

Todo grafo que é isomorfo a um menor de G é também chamado um menor de G

5.10 2-Base

Seja ε_G o conjunto de arestas de G . O par (ε_G, Δ) é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, sendo que a operação Δ é a *diferença simétrica*, definida por $F_1 \Delta F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)$.

Assim, podemos ver um subconjunto de arestas F de A como seu vetor característico $X^F \in \{0, 1\}^m$, onde $X_i^F = 1$ se e somente se $e_i \in F$.

Exemplo:

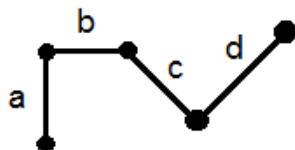
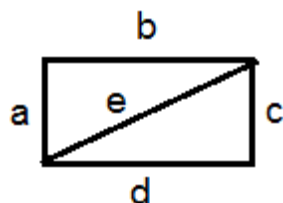


Figura 5.12: Grafo G.

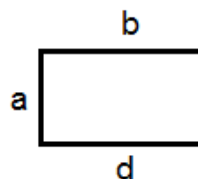
Na figura 6.11 são quatro arestas, portando $m = 4$. Se o subconjunto de arestas conter as arestas a e d , temos que $X^F = (1, 0, 0, 1)$.

O subespaço (C_G, Δ) dos ciclos de G é dito o **espaço dos ciclos de G** . Vamos agora definir o que é um circuito fundamental. Seja G um grafo conexo e seja T a árvore geradora de G . Um circuito fundamental de G é um ciclo formado pela adição de uma aresta de G à árvore geradora T .

Exemplo:



(a) Figura 6.12.1: Grafo G.



(b) Figura 6.12.2: Grafo T.

Podemos afirmar que se G tem m arestas e n nós, sabemos ainda que o número de arestas da árvore geradora T é $n - 1$. Então há $m - (n - 1) = m - n + 1$ circuitos fundamentais. O conjunto $B = \{C_e \mid e \in A \setminus A(T)\}$ dos circuitos fundamentais com respeito a T é linearmente independente, isto é, se C é o circuito fundamental de e com respeito a T , então C é o único destes circuitos fundamentais que contém e , portanto, não pode ser gerado pelos demais circuitos de B . Vamos provar que B é uma base de C_G .

Lema 5.2: Se T é uma árvore geradora de G e C_e é o circuito fundamental de e com respeito a T , para cada $e \in A(G) \setminus A(T)$, então $B = \{C_e \mid e \in A \setminus A(T)\}$ é uma base de C_G

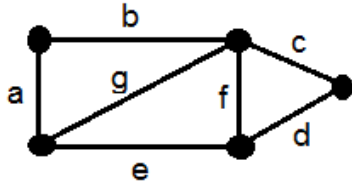
Demonstração. Já vimos que os elementos de B são linearmente independentes. Vamos provar que os elementos de B podem gerar qualquer ciclo H . Suponha que $A(H) = \{e_1, \dots, e_j, e_{j+1}, \dots, e_k\}$ e suponha que $e_1, \dots, e_j \in A(T), e_{j+1}, \dots, e_k \notin A(T)$. Seja $F = C_{e_{j+1}} \Delta C_{e_{j+2}} \Delta \dots \Delta C_{e_k}$. O subgrafo $F \subseteq G$ é um ciclo e $H \Delta F = \emptyset$. Isto é, $H = F$. Portanto, H pode ser gerado por B .

□

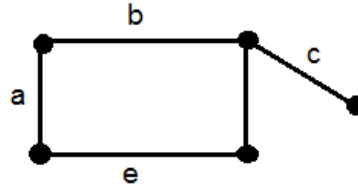
Uma base B de C_G é dita uma **2-base** de G se cada aresta de G pertence a no máximo 2 elementos de B . Se G é planar, então G tem uma 2-base. Basta considerar

uma imersão plana de G e tomar os circuitos dessa imersão, excluindo a face externa. Note que, pela fórmula de Euler, há precisamente $m - n + 1$ tais circuitos.

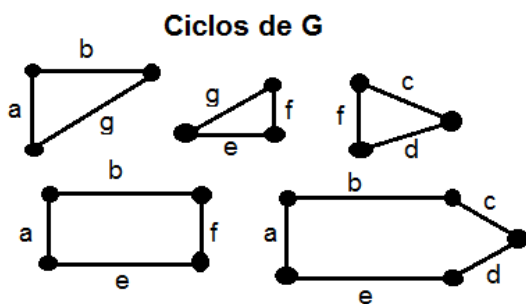
Exemplo de 2 - base



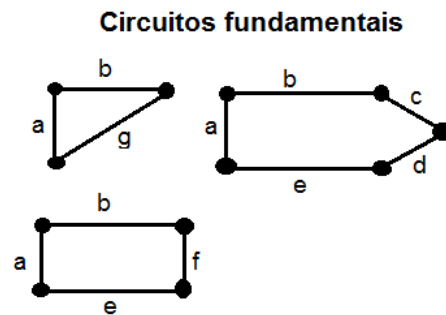
(a) Figura 6.13.1: Grafo G .



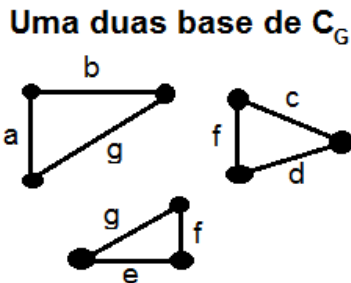
(b) Figura 6.13.2: Árvore geradora T .



(c) Figura 6.13.3 Ciclos de G .



(d) Figura 6.13.4 Circuitos fundamentais.



(e) Figura 6.13.5 Uma base de C_G .

5.11 Dual Combinatório

Um corte x de um grafo G conexo é um conjunto de arestas de G tal que G , sem as arestas de x , é desconexo. Seja D_G o conjunto dos cortes. O subespaço (D_G, Δ) de (ε_G, Δ) gerado pelos cortes (também chamados de *cociclos*) de G é o **espaço dos cociclos** de G .

Além disso, temos que G^c é um grafo formado pelos mesmos vértices de G . Entretanto, dois vértices de G^c são adjacentes se, e só se, eles não são adjacentes em G . Um par de grafos G e G^c é um par **dual combinatório** se existe uma bijeção $f: A(G) \rightarrow A(G^c)$ tal que C é um ciclo de G se, e somente se $f(C)$ é um *cociclo* de G^c . Nesse caso, também dizemos que G^c é um dual combinatório de G .

5.12 Subgrafo de Kuratowski

Dado um grafo G , um subgrafo G de Kuratowski é um subgrafo que é uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$

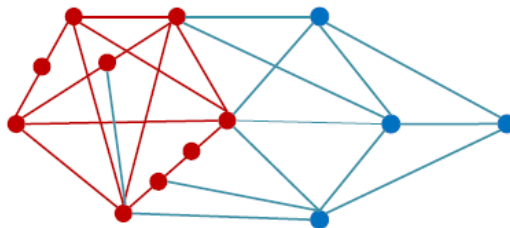


Figura 5.15: Subgrafo de Kuratowski, [16].

Seja G um grafo. Diz-se que G é K -aresta conexo se, para todo $S \subseteq A(G)$ e $|S| < K$, o grafo $G - S$ é conexo e possui pelo menos dois vértices.

Dado um grafo G qualquer. diz-se que G é K -conexo se, para todo $S \subseteq V(G)$ e $|S| < K$, o grafo $G - S$ é conexo e possui pelo menos dois vértices.

Teorema 5.7 (Teorema): Se G é 3-conexo e $|V(G)| \geq 5$, então G tem uma aresta α tal que G/α é 3-conexo.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o resultado não vale. Então para toda aresta $\alpha = xy \in A(G)$, tem-se que G/α (o grafo obtido de G pela contração da aresta α) é 2-conexo, Assim existe um conjunto $S \subset V(G)$ com dois elementos tal que $G/\alpha - S$ é desconexo.

Observe que a cardinalidade de S é sempre dois, caso contrário G não seria 3-conexo, ou seja, G/α é sempre 2-conexo.

Além disso, o vértice v_{xy} resultante da contração de α pertence a S , caso contrário, S seria subconjunto de $V(G)$ e $G - S$ seria desconexo (pois G é 3-conexo). Seja então z o vértice de S que não é v_{xy} .

Observe que cada componente C de $G/\alpha - S$ é um subgrafo de G . Vamos mostrar agora que cada componente de C está ligada a todos os vértices de $\{x,y,z\}$ em G . Suponha que C não está ligada a $t \in \{x,y,z\}$. Então a remoção de $\{x,y,z\} \setminus t$ desconecta C do resto do grafo G , o que contradiz sua 3- conexidade. Logo C está ligada a todos os vértices em $\{x,y,z\}$.

Considere $\alpha \in A(G)$ e S' conjunto separador em G/α , isto é, $S' \subset V(G/\alpha)$ e $G/\alpha - S'$ é desconexo, tais que a cardinalidade do menor componente de $G/\alpha - S'$ é a menor possível. Seja $G' = G/\alpha$.

Seja C o menor componente conexo de $G' - S'$. Seja também $v \in V(C)$ um vizinho de z em G' e $\beta = vz$.

Vamos mostrar que C possui ao menos dois vértices. Suponha que não e considere o grafo G/β . Como G/β é 2, sabemos que $S_\beta \subset V(G)$, $|S_\beta| = 2$ e $(G/\beta) - (S_\beta)$ é desconexo. Isso significa que o conjunto $(S_\beta \cup z)/v_\beta$ é separador em G , contradizendo sua 3-conexidade. Logo C possui pelo menos dois vértices.

Observe agora que, como G/β é 2-conexo, sabemos que há um $w \in V(G)$ tal que $S = \{v, z, w\}$ é desconexo G . Observe que todo componente de G/β está conectado a v em G . Mas então qualquer componente de G/β que não contém x (e conseqüentemente não contém y , pois x e y são vizinhos) está propriamente contido em C , pois deve ser vizinho de v . Isso contradiz a escolha de α , pois G' é a menor componente conexo.

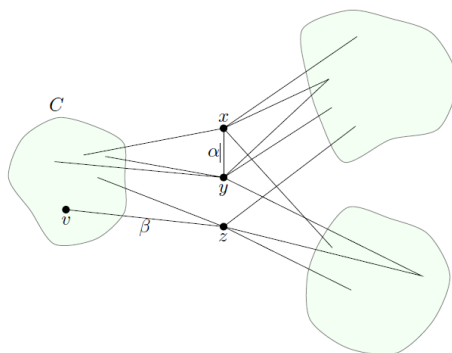


Figura 5.16: Exemplo de configuração das componentes conexas de G , [20].

□

Lema 5.3: Sejam G um grafo e e uma aresta qualquer de G . Se G/e contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$, então G também contém uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que G é conexo. Sejam $e = xy$ e z o vértice obtido pela contração da aresta e . Seja H uma subdivisão de K_5 ou a $K_{3,3}$ contida em G/e . Se $z \notin V(H)$, então H é uma subdivisão de K_5 ou a $K_{3,3}$ contida em G . Suponha então que $z \in V(H)$.

Seja H' um subgrafo de G tal que $H'/e = H$. Se z tem grau 1 ou 2 em H , então claramente H' contém uma subdivisão de K_5 ou a $K_{3,3}$. Podemos então assumir que o grau de z em H é pelo menos 3. Se x ou y tem grau 2 em H' , então H' tem uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. Suponha agora que o grau de x e o grau de y são maiores ou iguais a 3 em H' . Note que H não pode ter uma subdivisão de $K_{3,3}$, mas sim de K_5 . Conseqüentemente, H' tem uma subdivisão de H .

□

Teorema 5.8 (Teorema de Kuratowski): Um grafo é planar se e somente se G não contém uma subdivisão de K_5 ou a $K_{3,3}$

Demonstração. Provaremos por indução em $n = |V(G)|$ que se G não contém uma subdivisão de K_5 ou a $K_{3,3}$ então G é planar. A recíproca é imediata. Como $K_5 - e$ é planar para qualquer aresta e (pois K_5 é maximal não planar) em K_5 , a afirmação é verdadeira se $n \leq 5$. É importante lembrar que $K_5 - e$ é o grafo K_5 sem a aresta e . Suponha então que G tem $n \geq 6$ vértices e que a afirmação é

verdadeira para grafos com menos de n vértices. Dividimos a prova em dois casos dependendo se G é ou não 3-conexo.

Suponha que G não é 3-conexo. É imediato que um grafo é planar se, e somente, se cada um de seus blocos (subgrafo 2-conexo, isto é, sem vértice de corte, com o maior número de vértices possível) é planar. Podemos então assumir que G seja 2-conexo. Neste caso, G tem um par-separador $\{x,y\}$.

Sejam H_1 uma componente de $G - \{x,y\}$ e $H_2 = G - \{x,y\} - V(H_1)$. Tome $G_1 = G - V(H_1)$ e $G_2 = G - V(H_2)$. Claramente G_1 e G_2 têm menos vértices do que G , e também não contém subdivisões de K_5 e nem de $K_{3,3}$, pois G não tem subdivisões de K_5 ou $K_{3,3}$. Logo, pela hipótese de indução, G_1 e G_2 são planares. Basta, se necessário, desenhar cada grafo em uma esfera. Depois, fazer a projeção estereográfica com o norte em um ponto da aresta xy , conforme ilustrado abaixo.

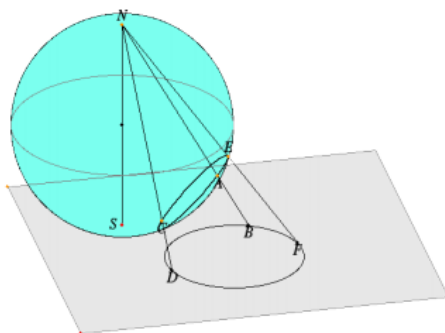


Figura 5.17: Projeção estereográfica, [16].

Estas duas imersões planas podem ser acopladas em x e y de modo a produzir uma imersão plana de G . Portanto, G é planar.

Suponha então que G é 3-conexo. Pelo teorema 1 concluímos que G tem uma aresta $e = xy$ tal que G/e é 3-conexo. Seja z o vértice obtido indentificando-se os vértices x e y . Pela contrapositiva do lema 1, G/e não contém uma subdivisão de K_5 e nem de $K_{3,3}$ e, portanto, pela hipótese de indução, G/e é planar. Considere uma aplicação injetiva que preserva as relações de adjacência de G/e e o subgrafo $G' = G/e - z$.

Seja F a face do grafo plano G' tal que a imagem de z , pela imersão, está contida na dentro da face F e seja C o circuito facial que é a fronteira da face F . É imediato que todos os vizinhos de x ou y , exceto eles próprios, devem pertencer a C . Sejam x_1, x_2, \dots, x_k os vizinhos de x que ocorrem em C em ordem cíclica, e seja P_i o caminho em C de x_i a x_{i+1} em que $(x_{k+1} = x_1$ não contém nenhum x_j , com $j \notin \{i, i+1\}$). Se um destes caminhos, do circuito facial c , contém todos os vizinhos de y diferentes de x , então uma imersão plana de G pode ser obtida a partir da imersão de G/e , donde segue que G é planar.

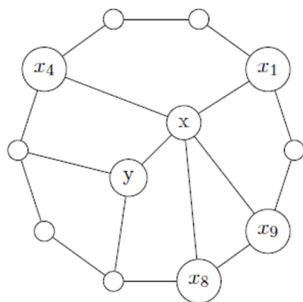


Figura 5.18: Caso planar, [20].

Analisemos então o caso em que nem todos os vizinhos de y , exceto x , estão contidos em um único dos caminhos P_i . Como y tem 3 ou mais vizinhos incluindo x , há 3 possibilidades:

- (a) y tem 3 ou mais vizinhos em $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$;

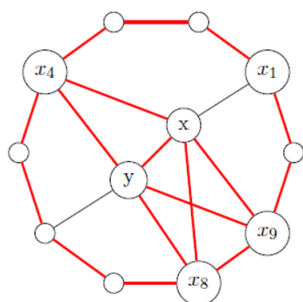


Figura 5.19: Caso (a), [20].

- (b) y tem um vizinho em algum P_i e um vizinho que não pertence a P_i

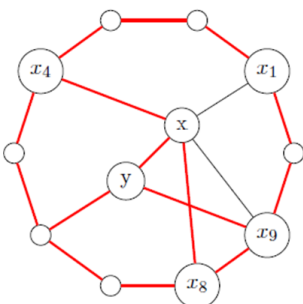


Figura 5.20: Caso (b), [20].

(c) y tem 2 vizinhos x_i e x_j tais que $|i - j| \neq 1$;

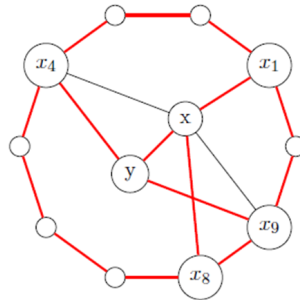


Figura 5.21: Caso (c), [20].

No caso (a) o subgrafo de G induzido pelos vértices de C juntamente com x e y contém uma subdivisão de K_5 .

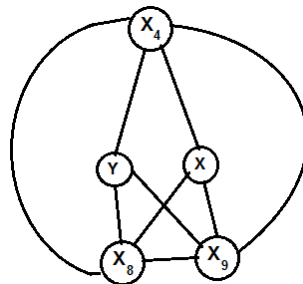


Figura 5.22: Contém uma subdivisão de K_5 .

No caso (b) , o subgrafo de G induzido pelos vértices de C juntamente com x e y contém uma subdivisão de $K_{3,3}$

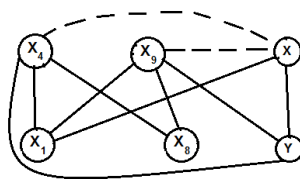


Figura 5.23: Contém uma subdivisão de $K_{3,3}$.

No caso (c), o subgrafo de G induzido pelos vértices de C juntamente com x e y contém uma subdivisão de $K_{3,3}$

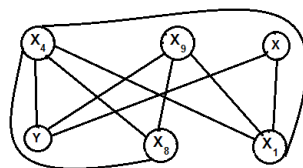


Figura 5.24: Contém uma subdivisão de $K_{3,3}$.

□

5.13 Mais alguns critérios de caracterização de grafos planares

O Teorema de Kuratowski é um resultado de caracterização de grafos planares. A seguir, apresentaremos mais três teoremas que caracterizam os grafos planares.

Teorema 5.9 (Teorema de Wagner): Um grafo G é planar se, e somente se, G não contém K_5 nem $K_{3,3}$ como menores.

Demonstração. Pode ser encontrado em [19].

□

Corolário 5.1 (Teorema de MacLane): Um grafo é planar se, e somente se, tem uma 2-base.

Demonstração. Pode ser encontrado em [2] e [9].

□

Teorema 5.10 (Teorema de Whitney): Um grafo é planar se, e somente se, tem um dual combinatório.

Demonstração. Pode ser encontrado em [2] e [9].

□

Bibliografia

- [1] Bondy, J. A., Murty, U.S.R. *Graph theory with applications*. Published:1976, New York: Elsevier North Inc.
- [2] Christian, R., Richter, B., Rooney, B., *The Planarity Theorems of MacLane and Whitney for Graph-like Continua*. Published: Jan 5, 2010. The electronic journal of combinatorics 17.
- [3] Cruz, J. S., Aloise, D. J., *Teoria dos grafos e Aplicações*. Centro de Ciências Exatas e da Terra; Departamento de Informática e Matemática Aplicada, Ano: 2001.
- [4] Fournier, J. C.; *Demonstration simple du théoreme de Kuratowski et de sa forme duale*. Discrete Mathematics, 31 (1980) 329-332.
- [5] Hopcroft, J., Tarjan, R., *Efficient planarity testing*. Journal of the ACM (JACM), Volume 21 Issue 4, Oct. 1974, Pages 549-568.
- [6] Junior, D. L. F., Almeida, A. C. L., *O Teorema das Cinco Cores*, 2014: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, disponível em <<https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/Divalde.pdf>> Acesso em Março.2018, Editora: SBM
- [7] Jurkiewicz, S., *Grafos: Uma introdução*, Vol. 5, Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2009.
- [8] Lucchesi, C. L., *Introdução à teoria dos grafos*. Ano de publicação: 1979. Páginas: 148, Rio de Janeiro: IMPA.
- [9] MacLane, S., *A combinatorial condition for planar graphs*. Fund. Math, 28:22-32, 1937.
- [10] Makarychev, Y., *A short proof of kuratowski's graph planarity criterion*. Journal of Graph Theory, 25:129-131, 1997. Published: December 7, 1998.
- [11] Mendes, M. H. S., Aulas do professor Dr. Marcus Henrique Soares Mendes - UFV - Campus Florestal.

- [12] Netto, P. O. B., *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 4 ed (2006), Ano de publicação: 2003, Páginas: 328, Editor: Edgard Blucher, ISBN: 85-2120-391-8.
- [13] Netto, P. O. B., Jurkiewicz, S., *Grafos: Introdução e Prática*, Editora: Blucher, Páginas: 328, Ano da edição: 2009, Edição: 1^a.
- [14] Nishizeki, T., Chiba, C., *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, pages: 213, 1988.
- [15] Rodrigues, F. A., *Caracterização, classificação e análise de redes complexas*, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, 20 de agosto de 2007.
- [16] Sheffer, A., Material da Caltech sobre Grafos Planares, disponível em <<http://www.math.caltech.edu/~2014-15/2term/ma006b/10%20Planar3.pdf>> Acesso em Janeiro. 2017.
- [17] Sousa, L. O Teorema das Quatro Cores. Millenium - Revista do ISPV, n. 24, 2001. Disponível eletronicamente em <http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf>.
- [18] Thomassen, C., *Kuratowski's theorem*. Journal of Graph Theory, 5:225-241, 1981.
- [19] Wagner, K. (1937), "Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe", Math. Ann., 114: 570–590, doi:10.1007/BF01594196.
- [20] Wakabayashi, Y., Notas de aula de teoria dos grafos, disponível em <<https://www.ime.usp.br/~tassio/arquivo/2012-ii/grafoes/notas-grafoes-congelado-para-revisao.pdf>> Acesso em Novembro. 2017.