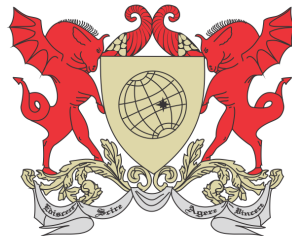


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO



ANA CAROLINA SANTOS MARTINS

# TEOREMAS DE CHASLES E MOHR-MASCHERONI

FLORESTAL  
MINAS GERAIS – BRASIL

ANA CAROLINA SANTOS MARTINS

**TEOREMAS DE CHASLES E MOHR-MASCHERONI**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

FLORESTAL  
MINAS GERAIS – BRASIL

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal**

M

M386t  
2021

Martins, Ana Carolina Santos, 2021-  
Teoremas de Chasles e Mohr-Mascheroni / Ana Carolina Santos Martins. – Florestal, MG, 2021.  
79 f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.  
Monografia (graduação) - Universidade Federal de Viçosa.  
Inclui bibliografia.


1. Isometria. 2. Homotetia. 3. Construções geométricas.  
4. Composição de homotetias. 5. Caracterização de isometrias.  
6. Matemática. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Licenciatura em Matemática.  
II. Título.

ANA CAROLINA SANTOS MARTINS

## TEOREMAS DE CHASLES E MOHR-MASCHERONI

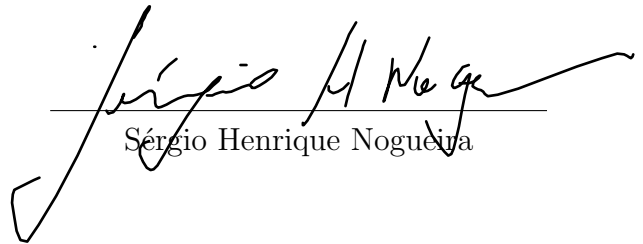
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

APROVADA: 20 de maio de 2021.



---

Alexandre Alvarenga Rocha



---

Sérgio Henrique Nogueira



---

Luís Felipe Gonçalves Fonseca  
Orientador

# Dedicatória

---

A pessoa cujo meu amor é incomensurável e motivo de toda minha inspiração: minha mãe (Manoelina ou Manu, como ela preferir).

# Agradecimentos

---

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida e por me capacitar a escrever o presente trabalho.

Agradeço à minha mãe Manoelina e ao meu pai Laudair pelo apoio financeiro, pois sem isso não seria possível que eu chegasse até aqui. De modo especial agradeço a minha mãe pelo apoio mais importante em minha jornada, o apoio emocional. Mãe sem você eu teria desistido de tudo, mas você se fez pilar e me manteve de pé.

Agradeço aos meus irmãos Gabriel, Guilherme (em memória) e Fabiana por todo incentivo e amor partilhado ao longo desses quase 5 anos.

Agradeço aos meus amigos: Filipe, João, José, Winston, Aysla, Luan, Gabriela e Luiz. Agradeço por surtarem junto comigo, mas por permanecer apesar dos pesares. Em especial, agradeço ao meu amigo Filipe. Estamos juntos desde o começo e ainda permanecemos juntos, saiba que você foi essencial nesse processo. Agradeço a sua amizade.

Agradeço aos demais colegas da vida e do curso que participaram do meu processo formativo.

Agradeço aos meus mestres (não importando aqui a titulação) pelos conteúdos e valores ensinados ao longo de todas as etapas da minha educação escolar, principalmente por despertar o amor pela matemática.

Agradeço a todo corpo docente do departamento de matemática: Danielle, Lúcia Helena, Justino, Alexandre, Mehran, Sérgio, Luís Felipe e Fernando. Esses participaram diretamente desse trajeto. Levarei “um pedaço” de cada um na construção do meu eu profissional. Em especial, agradeço ao professor Luís Felipe por me orientar, ser paciente e por me oportunizar estudar esse campo que amo, a geometria.

Agradeço ao meu namorado Johnny por me apoiar na etapa final desse trabalho.

Saibam que esse trabalho é tradução do meu amor pela matemática e do meu agradecimento a vocês.

# Resumo

---

MARTINS, Ana Carolina Santos, Universidade Federal de Viçosa, de . **Teoremas de Chasles e Mohr-Mascheroni**. Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

A Geometria Plana é um dos ramos mais antigos da matemática. Sua beleza inquestionável e a sua presença em nosso cotidiano nos permitem trabalhá-la de forma ampla. Neste trabalho, abordaremos duas transformações no plano, a saber, a isometria e a homotetia. A partir do Teorema de Chasles iremos caracterizar as isometrias, e o Teorema de Monge-D'Alembert tratará da caracterização da composição de homotetias. Adentrando o campo das construções geométricas, mostraremos o belo teorema atribuído a Georg Mohr e Lorenzo Mascheroni, que provaram, de forma independente, que toda construção feita com régua e compasso pode ser feita utilizando apenas o compasso.

# Abstract

---

MARTINS, Ana Carolina Santos, Universidade Federal de Viçosa, , . **Chasles and Mohr-Mascheroni Theorems**. Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

The Flat Geometry is one of the oldest “ ways ” of doing mathematics. Its unquestionable beauty and its presence in our daily life allows us to work on it in a wide way. In this work, we will approach two transformations in the plane, namely, isometry and homothetia. And what happens if we compose two homothetias? Through the Chasles Theorem we will characterize the isometries and the Monge-D'Alembert Theorem will deal with the characterization of the composition of homothetias. Entering the field of geometric constructions we will show the beautiful theorem attributed to Georg Mohr and Lorenzo Mascheroni, who proved, independently, that any construction made with a ruler and compass can be done using only the compass.



# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Noções Básicas</b>	<b>3</b>
2.0.1	Distância entre dois pontos . . . . .	3
2.0.2	Casos de congruência de triângulos . . . . .	3
2.0.3	Casos de semelhança de triângulos . . . . .	5
2.0.4	O Teorema Fundamental da Proporcionalidade e sua recíproca . . . . .	7
2.0.5	Circunferência . . . . .	7
2.0.6	A bissetriz . . . . .	8
2.0.7	Incírculo e Ex-incírculo . . . . .	8
2.0.8	A mediatriz . . . . .	9
2.0.9	O número áureo . . . . .	10
2.0.10	Simétrico de um ponto . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Isometria</b>	<b>13</b>
3.1	Transformação no Plano . . . . .	13
3.2	A Isometria e a Congruência . . . . .	13
3.3	Tipos de Isometrias . . . . .	16
3.3.1	Identidade . . . . .	16
3.3.2	Reflexão em Reta . . . . .	16
3.3.3	Translação . . . . .	22
3.3.4	Rotação . . . . .	24
3.3.5	Reflexão com deslizamento . . . . .	28
3.3.6	Isometrias na reta . . . . .	29
3.3.7	Propriedades . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Homotetia</b>	<b>32</b>
4.1	Homotetia . . . . .	32
4.1.1	Os pontos V, P e P' . . . . .	33
4.1.2	Propriedades . . . . .	34
4.1.3	Homotetia e Semelhança . . . . .	39
4.1.4	Aplicação da Homotetia . . . . .	40
4.1.5	Homotetia e Circunferências . . . . .	41

---

<b>5</b>	<b>O Teorema de Chasles</b>	<b>44</b>
5.0.1	Caracterização das isometrias . . . . .	44
<b>6</b>	<b>O Teorema de Monge-D'Alembert</b>	<b>48</b>
6.1	Caracterização da Composição de Homotetias . . . . .	48
6.1.1	Aplicação do Teorema na resolução da questão da IMO . . . . .	51
<b>7</b>	<b>O Teorema de Mohr-Mascheroni</b>	<b>55</b>
7.1	Construção da demonstração . . . . .	55
7.2	A Demonstração . . . . .	56
7.3	A construção de um quadrado de lado $l$ . . . . .	61
7.3.1	Com régua e compasso . . . . .	62
7.3.2	Apenas com o compasso . . . . .	63
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

# Introdução

---

A geometria plana está presente em nosso cotidiano desde as primeiras civilizações. O avanço nos estudos da geometria, assim como dos objetos geométricos, contribuiu para diversos outros campos da matemática, diretamente ou indiretamente, como geometrias não-euclidianas e a teoria dos números.

Este trabalho é resultado de uma iniciação voluntária iniciada no ano de 2019. Os conteúdos que serão apresentados nos capítulos subsequentes são uma continuação da disciplina de Fundamentos de Geometria Plana e Desenho Geométrico, lecionada pelo orientador do presente trabalho.

Quanto à estrutura, o trabalho é dividido em sete capítulos. O próximo capítulo deste trabalho é composto de conceitos e resultados básicos, dentro da geometria, que serão fundamentais para o entendimento dos conteúdos que serão apresentados ao longo do trabalho.

Principiamos os estudos pela transformação no plano que preserva distâncias, a isometria, definindo-a, enumerando e mostrando suas propriedades e conceitos. Veremos que ao aplicar a isometria a uma figura, esta será levada a uma figura congruente.

A outra transformação que apresentaremos é a homotetia, vista no quarto capítulo, e dentre suas propriedades, constataremos um resultado interessante relacionado com homotetia e circunferências. É bem conhecido que duas circunferências são sempre semelhantes e como a homotetia estabelece uma relação de semelhança entre a figura e sua imagem é de se esperar que tal fato aconteça. Já em contraste com a isometria, a homotetia estabelece uma relação de semelhança entre uma figura e sua imagem pela homotetia.

Os capítulos cinco, seis e sete tratarão de resultados das transformações no plano estudadas. O primeiro resultado que leva o nome do matemático Michel Chasles (1793-1880), o Teorema de Chasles, irá caracterizar os tipos de isometrias.

Em relação à homotetia, abordaremos do Teorema de Monge-D'Alembert que irá caracterizar a composição de homotetias. Finalizaremos o capítulo enunciando e resolvendo um problema da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) do ano de 2008.

No último capítulo, traremos um resultado a respeito das construções geométri-

cas. O Teorema de Mohr-Mascheroni, que leva o nome dos matemáticos Lorenzo Mascheroni (1750-1800) e Georg Mohr (1640-1697), diz que toda construção feita com régua não graduada e compasso pode ser realizada apenas com compasso. A fim de comparar os dois processos de construção, finalizaremos com a construção de um quadrado das duas formas, com régua e compasso e somente com o compasso.

Ademais, as construções que são exibidas no presente trabalho foram feitas pela orientanda com auxílio do *software* GeoGebra e baseadas nos livros-texto usados para os estudos, que são devidamente listados no capítulo de referências bibliográficas.

# Noções Básicas

---

Neste capítulo, trataremos de conceitos e resultados essenciais dentro da geometria que serão importantes para a compreensão dos conteúdos ao longo do trabalho. Serão destacados os casos de congruência e semelhança de triângulos, o teorema que relaciona duas retas tangentes a uma circunferência, conhecida no ensino básico como a regra do “chapéu do palhaço”, o teorema fundamental da proporcionalidade, assim como sua recíproca.

Esse capítulo é baseado nas referências [3] e [5]. Assim, nelas encontraremos as demonstrações dos resultados, aqui mencionados, com maiores detalhes.

## 2.0.1 Distância entre dois pontos

Sejam  $A$  e  $B$  pontos do plano. A distância entre os pontos  $A$  e  $B$ , denotada por  $dist(A, B) = AB$ , é definida como  $|B - A| = r$ , em que  $r$  é um número real não negativo.  $r$  é igual a zero se, e somente se, o ponto  $A$  coincide com  $B$ .

Suponhamos, agora, que tenhamos um segmento  $\overline{AB}$  e o um ponto  $C$  pertencente a esse segmento. Diremos que  $C$  “está entre” os pontos  $A$  e  $B$  se  $AC + CB = AB$ .

## 2.0.2 Casos de congruência de triângulos

Um triângulo é um polígono convexo de três lados. Estes podem ser classificados como equiláteros, isósceles e escaleno a depender das medidas de seus lados, e ainda em retângulo, acutângulo, obtusângulo e equiângulo a depender da medida de seus ângulos.

**Definição 2.1:** Dizemos que dois triângulos são **congruentes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que quaisquer pares de lados correspondentes e quaisquer pares de ângulos correspondentes sejam congruentes, isto é, têm a mesma medida. Usaremos  $\cong$  como sinal de congruência.

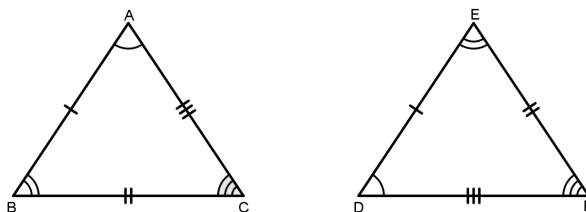


Figura 2.1:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

A congruência é uma relação de equivalência, isto é, é reflexiva, simétrica e transitiva.

O processo de verificar se dois triângulos são congruentes, dada uma correspondência, pode ser demorado. Os três casos de congruências a seguir estabelecem condições mínimas, necessárias e suficientes para que isso ocorra. São eles:

**Primeiro caso de congruência de triângulos ou Caso L.A.L.** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $AB \cong DE$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $BC \cong EF$ , então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

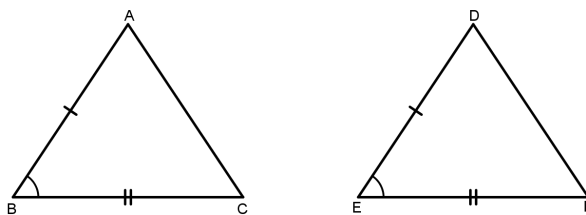


Figura 2.2

**Segundo caso de congruência de triângulos ou Caso A.L.A.** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $AB \cong DE$  e  $\hat{B} \cong \hat{E}$ , então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

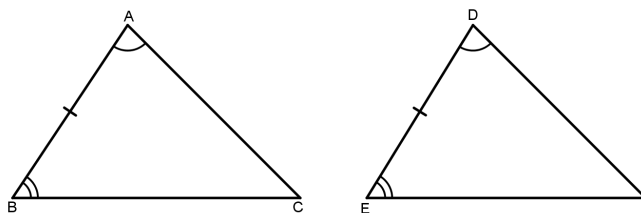


Figura 2.3

**Terceiro caso de congruência de triângulos ou Caso L.L.L.** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $AB \cong DE$ ,  $BC \cong EF$  e  $CA \cong FD$ , então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ , ou seja, se dois triângulos possuem os três lados correspondentes congruentes temos que eles são congruentes.

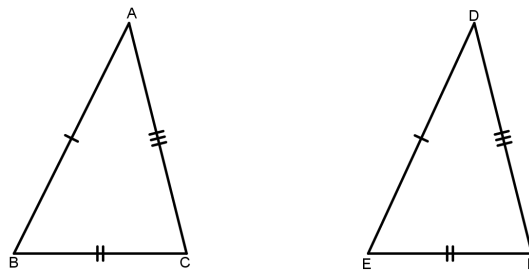


Figura 2.4

**Quarto caso de congruência de triângulos ou Caso L.A.A<sub>OPOSTO</sub>.** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $AB \cong DE$ ,  $\widehat{B} \cong \widehat{E}$  e  $\widehat{C} \cong \widehat{F}$ , então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

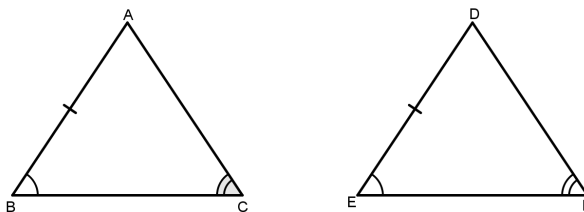


Figura 2.5:  $A_{OPOSTO}$  são os ângulos opostos aos lados congruentes.

### 2.0.3 Casos de semelhança de triângulos

**Definição 2.2:** Seja  $S$  uma correspondência biunívocas entre os vértices dos triângulos  $ABC$  e  $DEF$ . Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência  $S$  é uma **semelhança**, e dizemos que os triângulos são semelhantes. Denotado por  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

**Exemplo 2.0.1:** Sejam  $ABC$  e  $DEF$  triângulos semelhantes.

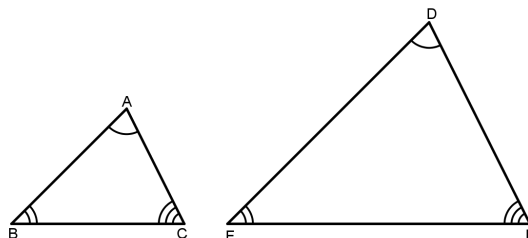


Figura 2.6

Então temos que  $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$ ,  $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$  e  $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ , e também que  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{DF} = k$ . Em que  $k$  é um número real positivo e não nulo, chamado de **razão de proporcionalidade** ou ainda **razão de semelhança entre os triângulos**.

Note que dois triângulos congruentes são sempre semelhantes com razão de proporcionalidade 1,  $k = 1$ .

Assim, como na congruência existem condições para que dois triângulos sejam semelhantes, os casos de semelhança são:

**Primeiro caso de semelhança ou Caso A.A.A .** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\hat{C} \cong \hat{F}$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

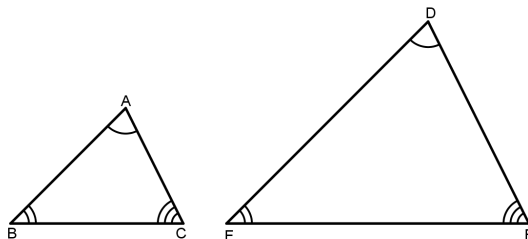


Figura 2.7

Segue desse caso que se dois triângulos têm dois pares de ângulos correspondentes congruentes, então eles também serão semelhantes.

**Segundo caso de semelhança ou Caso L.A.L .** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

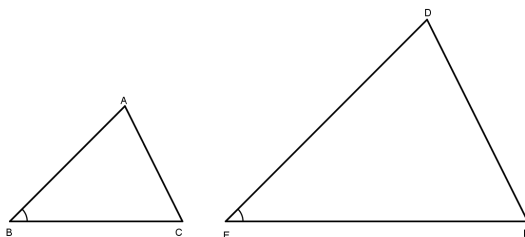


Figura 2.8

**Terceiro caso de semelhança ou Caso L.L.L .** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  se os seus lados satisfazem a relação  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{AF}$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

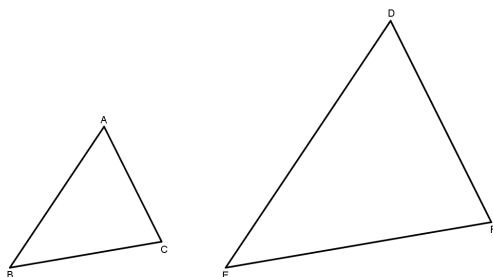


Figura 2.9



### 2.0.4 O Teorema Fundamental da Proporcionalidade e sua recíproca

**Teorema 2.1: (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)** Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados em pontos distintos, então ela os divide na mesma razão.

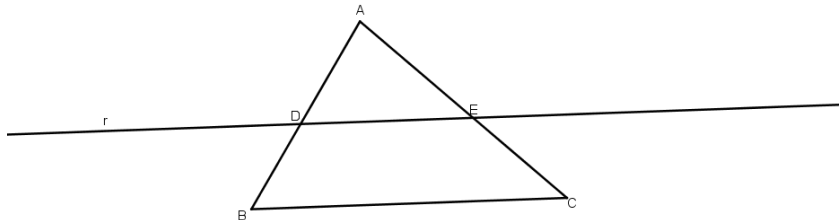


Figura 2.10

Na figura acima a reta  $r$  é paralela a reta que contém o segmento de reta  $BC$ , além disso ela intercepta os outros dois lados do triângulo  $ABC$  nos pontos  $D$  e  $E$ . Se  $r$ , ou ainda se o segmento de reta  $DE$  divide os lados do triângulo em uma mesma razão é o mesmo que dizer que  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = k$ , em que  $k \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Teorema 2.2: (Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade)** Se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.

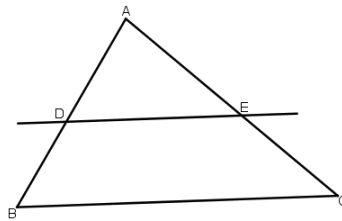


Figura 2.11: Se  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ , então  $DE$  é paralelo a  $BC$ .

### 2.0.5 Circunferência

Denotaremos, a partir de agora,  $\mathcal{C}(O, r)$  como sendo a circunferência de centro no ponto  $O$  e de raio  $r$ .

Vejam os teoremas que relacionam as retas tangentes a uma circunferência que se encontram em um determinado ponto.

**Teorema 2.3:** Os dois segmentos tangentes a uma circunferência,  $\mathcal{C}(O, r)$ , desde um mesmo ponto exterior dado são congruentes e formam ângulos congruentes com a reta que une o ponto exterior ao ponto  $O$ .

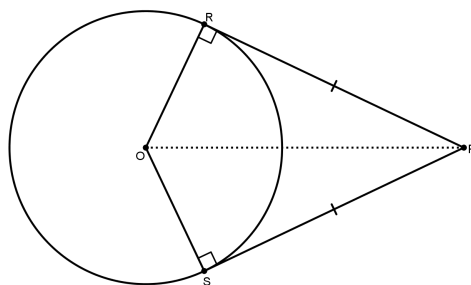
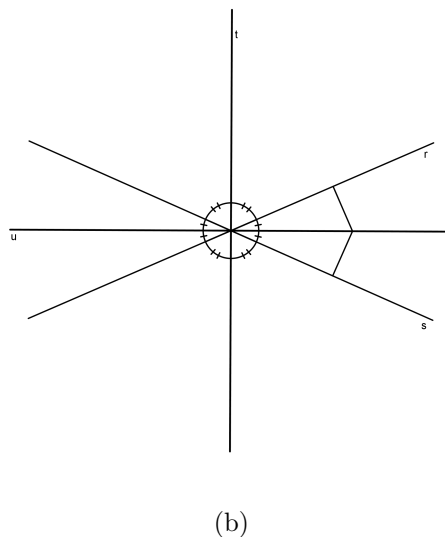
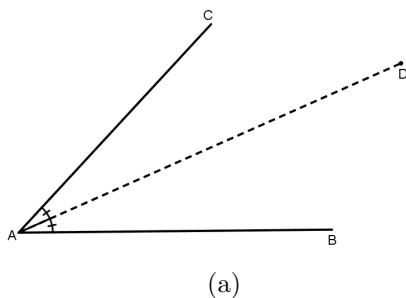


Figura 2.12

### 2.0.6 A bissetriz

**Definição 2.3:** A **bissetriz** de um ângulo  $\widehat{AOB}$  é uma semirreta  $\overrightarrow{OC}$  tal que  $C$  está no interior deste ângulo e  $\widehat{AOC} \cong \widehat{BOC}$ . Como lugar geométrico, é o conjunto dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes,  $r$  e  $s$ , isto é, é o par de retas  $t$  e  $u$  que divide igualmente os quatro ângulos formados por  $r$  e  $s$ , ou seja, duas bissetrizes.



### 2.0.7 Incírculo e Ex-incírculo

**Teorema 2.4:** Sejam  $ABC$  um triângulo. As bissetrizes internas se encontram em um ponto  $I$ , o qual denominamos de incentro. A circunferência cujo centro coincide com  $I$  e é tangente aos lados desse triângulo é dita **circunferência inscrita** ou **incírculo**.

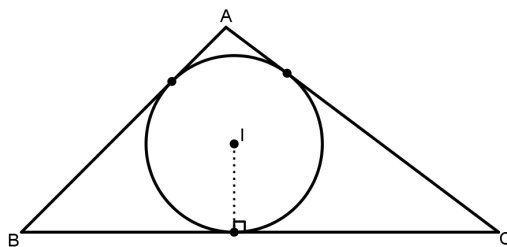


Figura 2.13

**Teorema 2.5:** Seja  $ABC$  um triângulo. Um círculo tangente ao lado  $BC$  e aos prolongamentos dos lados  $AB$  e  $AC$  é dito **ex-incírculo** relativo ao vértice  $A$ . Já o seu centro é chamado ex-incentro, denotado por  $I_A$ , e seu raio de ex-inraio.

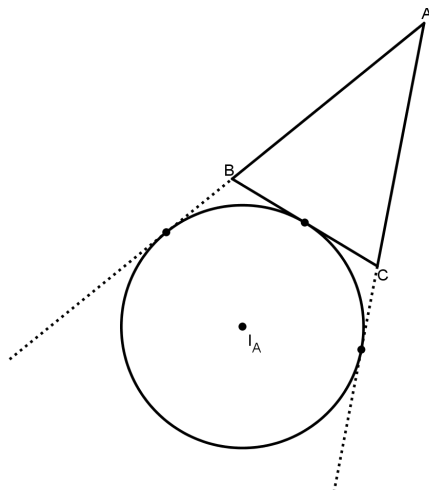


Figura 2.14

### 2.0.8 A mediatriz

**Definição 2.4:** A **mediatriz** de um segmento  $\overline{AB}$  é a reta perpendicular ao segmento e que contém seu ponto médio. Como lugar geométrico, é o conjunto dos pontos que equidistam de  $A$  e  $B$ .

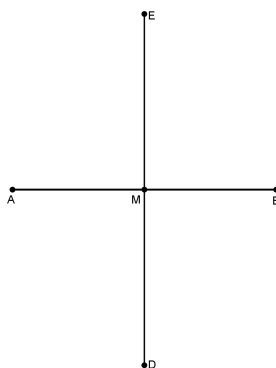
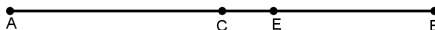


Figura 2.15: A mediatriz é a reta que passa pelos pontos  $C$  e  $D$ .

### 2.0.9 O número áureo

**Definição 2.5:** Dado o segmento  $\overline{AB}$  de comprimento  $a$ , podemos determinar um ponto  $E$  tal que  $AE$  seja a média geométrica entre  $AB$  e  $BE$ , isto é,  $AE = \sqrt{AB \cdot BE}$ . O segmento  $\overline{AE}$  é dito segmento áureo interno de  $\overline{AB}$  e o ponto  $E$  é tal que:



**Figura 2.16:**  $C$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ .

Se denotarmos  $AE = x$ , obtemos  $BE = a - x$ , assim podemos escrever

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}. \quad (1)$$

O caso que  $\phi = \frac{a}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$  é chamado de **número áureo** ou **número de ouro**. Um retângulo é dito **áureo** se a razão entre seu lado maior e o lado menor é igual ao número áureo.

Façamos a construção do retângulo áureo e sua justificativa.

(i) *Construção.* Primeiro traçamos uma reta suporte,  $r$ , e transportamos o segmento de medida  $AB$  e determinamos os pontos  $C, D$ , de modo que  $ABCD$  seja um quadrado de lado  $l$ . Faremos tal construção com todos detalhes no último capítulo.

Agora determinamos o ponto médio do segmento,  $M, \overline{AB}$  que pode ser obtido ao tomar a interseção do segmento  $\overline{AB}$  com sua mediatriz. Para tanto, a mediatriz é determinada pelos pontos de interseção das circunferências  $\mathcal{C}(A, AB)$  e  $\mathcal{C}(B, AB)$ .

Determinemos o ponto  $E$  que é encontrado com a interseção da reta que passa por  $A, B$  com a circunferência  $\mathcal{C}(M, MC)$ . Por último, tomemos a interseção,  $F$ , das circunferências  $\mathcal{C}(E, l)$  e  $\mathcal{C}(D, BE)$ . O quadrilátero  $AEFC$  é o retângulo áureo procurado.

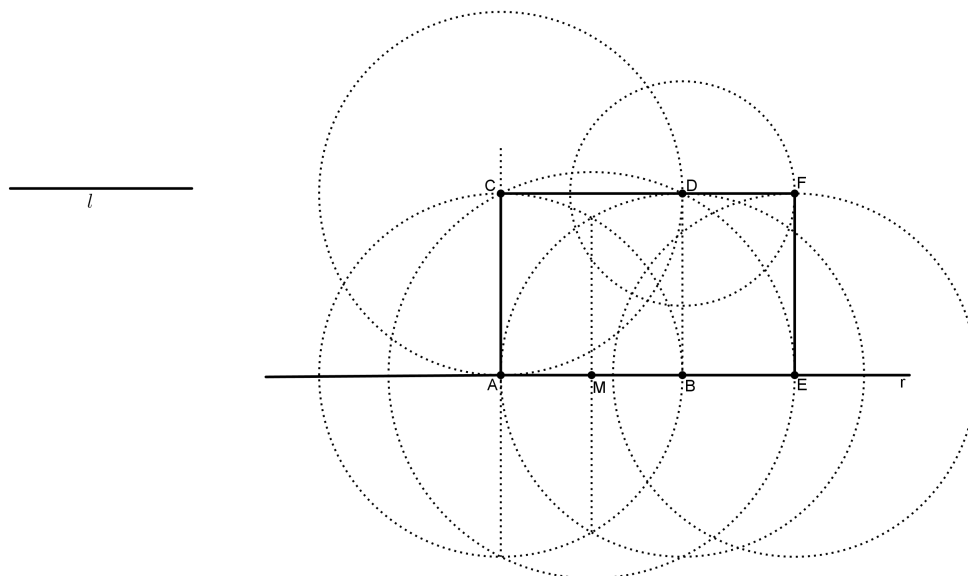


Figura 2.17

(ii) *Justificativa.* Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$MD^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2 = \frac{5l^2}{2}.$$

Por conseguinte,  $MD = \frac{l\sqrt{5}}{2}$ , assim:

$$AE = \frac{l}{2} + MC = \frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{5}}{2} = l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Além do mais, notemos que retângulo  $BEFD$  é, também, um retângulo áureo, tal que  $\overline{BE}$  é o segmento áureo de  $\overline{BD}$ .

### 2.0.10 Simétrico de um ponto

Sejam  $r$  e  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ . Tomemos a reta perpendicular,  $s$ , a  $r$  que passa pelo ponto  $P$ , o ponto  $P'$  pertencente a  $s$  tal que  $PQ = P'Q$ , em que  $Q$  é ponto de interseção das duas retas, é dito **simétrico com relação à reta  $r$** .

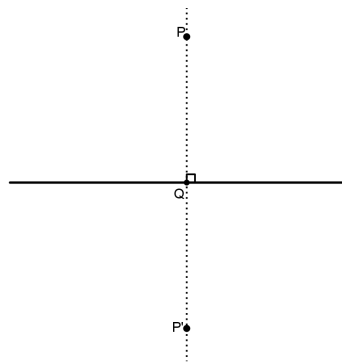


Figura 2.18

Podemos também definir o **simétrico** de um ponto com relação à outro ponto  $O$ . Nesse caso, o ponto  $P'$  é tal que  $PO = P'O$ , além disso, esses pontos são colineares.

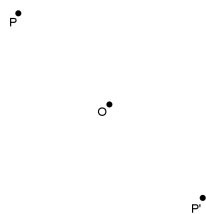


Figura 2.19

# Isometria

---

Neste terceiro capítulo, trataremos das definições e propriedades referentes a um dos tipos de transformação no plano necessária para demonstração do Teorema de Chasles, que caracteriza as isometrias. As referências [3] e [5] foram as utilizadas para o estudo da isometria.

## 3.1 Transformação no Plano

Uma **transformação no plano** é uma função bijetora do conjunto de pontos do plano sobre si mesmo, isto é, é uma função bijetora do plano no plano.

Como a transformação no plano é uma função bijetora podemos também definir a transformação inversa.

**Definição 3.1: (Transformação Inversa de  $T$  ( $T^{-1}$ ))** É a transformação no plano tal que  $T^{-1}(Y)$  é o único ponto  $X$  do plano tal que  $T(X) = Y$ .

Se  $\mathcal{F}$  é uma figura contida no plano, a imagem de  $\mathcal{F}$  pela transformação  $T$  é definida como  $T(\mathcal{F}) = \{T(P), P \in \mathcal{F}\}$ .

Com essas definições podemos agora definir a isometria.

## 3.2 A Isometria e a Congruência

Uma **isometria** é uma transformação no plano que preserva distâncias, isto é, se  $T$  é uma isometria, para qualquer par de pontos  $A$  e  $B$  vale que  $dist(A,B) = dist(T(A),T(B))$ .

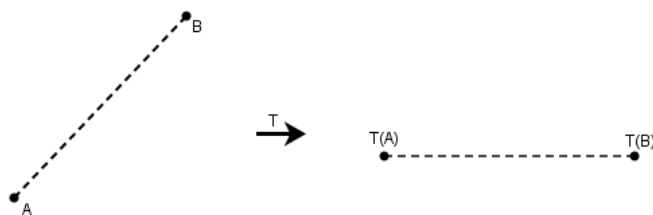


Figura 3.1

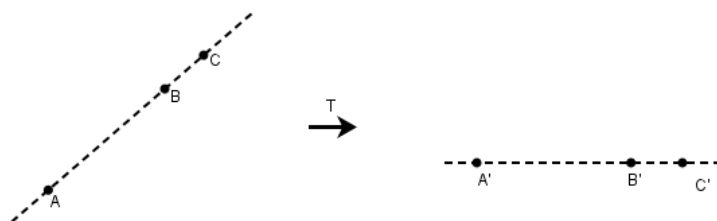
Uma importante observação a ser feita é que a **transformação inversa**  $T^{-1}$  **de uma isometria** é uma **isometria**. Para demonstrar tal fato, observemos que a transformação inversa  $T^{-1}$  levará o ponto  $T(A)$  e o ponto  $T(B)$  em  $A$  e  $B$ , respectivamente. Como  $dist(T(A),T(B)) = dist(A,B)$ , a transformação inversa  $T^{-1}$  preserva distâncias.

O teorema a seguir enumera algumas propriedades das isometrias.

**Teorema 3.1:** Uma isometria  $T$  possui as seguintes propriedades:

- (a)  $T$  leva pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se  $A, B$  e  $C$  são pontos tais que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então  $T(B)$  está entre  $T(A)$  e  $T(C)$ , ou seja,  $T$  preserva a relação de “estar entre”;
- (b)  $T$  leva retas em retas; leva semirretas em semirretas; leva ângulos em ângulos e segmentos em segmentos;
- (c)  $T$  preserva a medida de ângulos;
- (d)  $T$  preserva paralelismo entre retas, isto é, se  $r$  e  $s$  são retas paralelas, então  $T(r)$  e  $T(s)$  também são retas paralelas;
- (e)  $T$  leva circunferências em circunferências.

*Demonstração.* (a) Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos, tais que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , considere também  $T(A) = A'$ ,  $T(B) = B'$  e  $T(C) = C'$ .



**Figura 3.2**

Como  $B$  está entre  $AC$ , temos que  $AB + BC = AC$ . Visto que  $T$  é uma isometria, tem-se que  $A'B' + B'C' = A'C'$ , ou seja,  $B'$  está entre  $A'$  e  $C'$  e, por conseguinte,  $A', B'$  e  $C'$  são colineares;

- (b) Sejam  $r$  uma reta,  $A$  e  $B$  dois de seus pontos. Do item anterior, tem-se que  $T$  leva pontos colineares em pontos colineares, então a isometria  $T$  da reta que passa por  $AB$  está contida na reta que passa pelas imagens de  $A$  e  $B$ ,  $\overleftrightarrow{A'B'}$ .

De forma análoga, tem-se que a inversa da isometria  $T$ ,  $T^{-1}$ , da reta que passa por  $A'B'$  está contida na reta determinada por  $AB$ . Portanto,  $T(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{A'B'}$ .



- (c) Sejam  $\theta$  um ângulo com vértice em  $O$  e  $T(\theta) = \theta'$  sua imagem pela isometria  $T$  com vértice em  $O'$ .

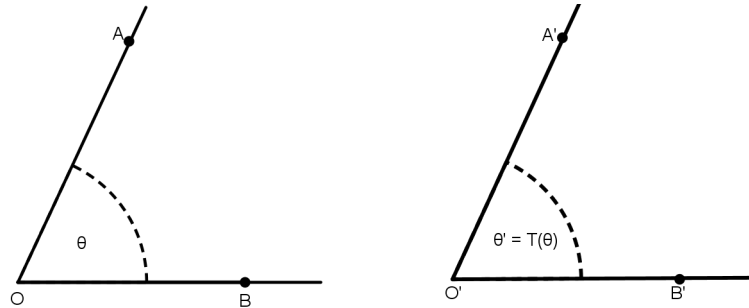


Figura 3.3

Tomemos  $A$  e  $B$  pontos, um em cada lado das semirretas que definem  $\theta$ , tais que  $OA = OB$ . É evidente que, se  $A'$  e  $B'$  são imagens de  $A$  e  $B$ , temos  $O'A' = O'B'$ . Ademais, por se tratar de uma isometria tem-se  $AB = A'B'$ .

Como  $AB = A'B'$  e  $OA = OB = O'A' = O'B'$ , podemos concluir pelo caso de congruência de triângulos LLL que os triângulos  $AOB$  e  $A'O'B'$  são congruentes, logo  $m(\hat{\theta}) = m(\hat{\theta}')$ .

- (d) Sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas,  $T(r) = r'$  e  $T(s) = s'$ . E consideremos, ainda, em  $s$  e  $r$  pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, tais que  $T(A) = A'$  e  $T(B) = B'$ .

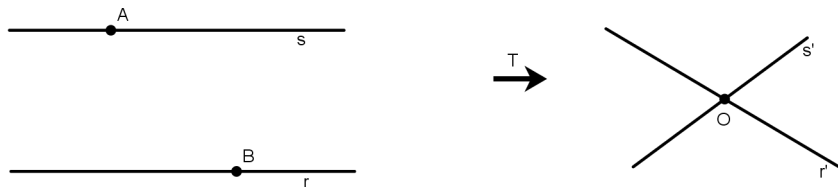


Figura 3.4

Suponhamos que as retas  $r'$  e  $s'$  sejam concorrentes no ponto  $O$ , de tal modo que  $A' = B' = O$ . Mas como  $r$  e  $s$  são paralelas, a isometria  $T$  deveria preservar a  $AB = A'B'$  que é evidentemente diferente de 0, logo  $r'$  e  $s'$  são retas paralelas.

- (e) Seja  $\mathcal{C}(O,r)$  uma circunferência. Pela definição de isometria obtemos que  $T(\mathcal{C}(O,r))$  está contida em  $\mathcal{C}(T(O),r)$ .

Seja  $P'$  um ponto de  $\mathcal{C}(T(O),r)$ , isto é,  $T(O)P' = r$ . Temos então  $T(O)T(P) = r$ . Portanto,  $OP = r$ , ou seja,  $P'$  é a imagem do ponto  $P$ , com  $P$  pertencente a  $\mathcal{C}(O,r)$ .

□

**Teorema 3.2:** Uma isometria  $T$  transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.

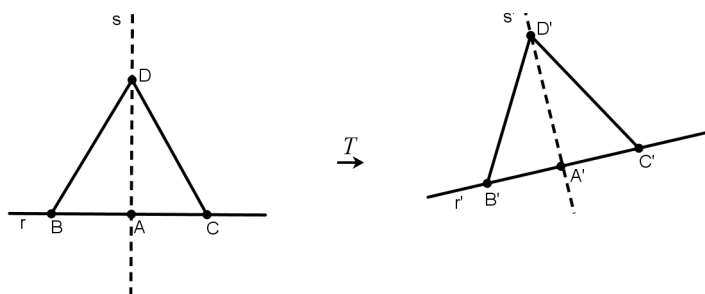


Figura 3.5

*Demonstração.* Dadas as retas perpendiculares  $r$  e  $s$  no plano, consideremos  $A$  o ponto de interseção de  $r$  e  $s$ , dois pontos  $B$  e  $C$  em  $r$  equidistantes de  $A$ . Considere  $D$  um ponto sobre  $s$ . Ao aplicar a isometria a cada um dos pontos considerados, teremos  $T(A) = A'$ ,  $T(B) = B'$ ,  $T(C) = C'$  e  $T(D) = D'$ . Assim  $T(r) = r'$  é a reta que passa pelos pontos  $B'$  e  $C'$  e  $T(s) = s'$  a reta que passa por  $A'$  e  $D'$ . A isometria  $T$  transforma a mediatriz  $\overleftrightarrow{AD}$  do triângulo isósceles  $BCD$  na mediatriz  $\overleftrightarrow{A'D'}$  do triângulo isósceles  $B'C'D'$ , visto que  $T$  preserva ângulos e transforma retas em retas. Portanto,  $\overleftrightarrow{A'D'}$  é perpendicular a  $B'C'$ , ou seja,  $r'$  é perpendicular a  $s'$ .  $\square$

Dispondo dessas propriedades, podemos definir a congruência entre duas figuras no plano usando como ferramenta a isometria.

**Definição 3.2:** Duas figuras  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  no plano são **congruentes** se existe uma isometria tal que  $\mathcal{G}$  é a imagem de  $\mathcal{F}$  por essa isometria.

### 3.3 Tipos de Isometrias

É de suma importância para este trabalho o conhecimento dos tipos de isometria e suas propriedades, visto que iremos caracterizá-las no Teorema de Chasles.

#### 3.3.1 Identidade

A **Identidade** é a isometria tal que  $I(A) = A$ , para qualquer ponto  $A$  do plano.

#### 3.3.2 Reflexão em Reta

Seja  $r$  uma reta. A isometria dada pela transformação que leva cada ponto  $X$  no plano em seu simétrico  $X'$  em relação à reta  $r$  é chamada **reflexão na reta  $r$** . Outro nome para reflexão na reta  $r$  é simetria. Ela será denotada por  $R_r$ . A reta  $r$  é chamada *eixo da reflexão* de  $R_r$ .

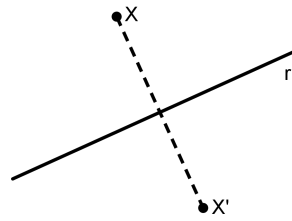


Figura 3.6

Provemos que a reflexão é de fato uma isometria, para isso consideraremos dois casos. Sejam  $X, Y$  pontos distintos do plano e  $R_r(X) = X', R_r(Y) = Y'$  suas imagens pela reflexão  $R_r$ . No primeiro caso, os dois pontos estão em um mesmo semiplano, determinado por  $r$ , e no segundo em semiplanos opostos.

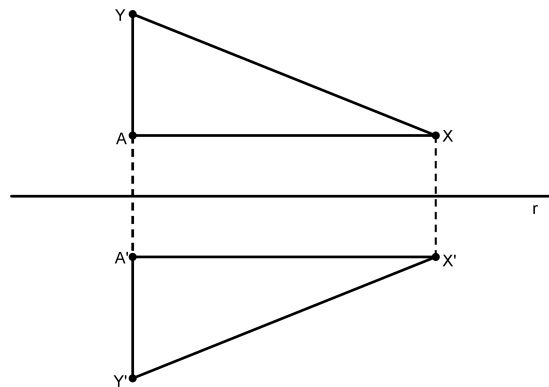


Figura 3.7: Primeiro caso

Para o primeiro caso, tracemos os segmentos  $\overline{XA}$  e  $\overline{X'A'}$  paralelos a  $r$ . Notamos que os triângulos retângulos  $XAY$  e  $X'A'Y'$  têm os catetos com o mesmo comprimento, logo suas hipotenusas terão mesma medida, ou seja,  $XY = X'Y'$ .

No segundo caso, sejam  $A$  e  $B$  os pontos de interseção dos segmentos  $\overline{XY}$  e  $\overline{X'Y'}$  com a reta  $r$ .

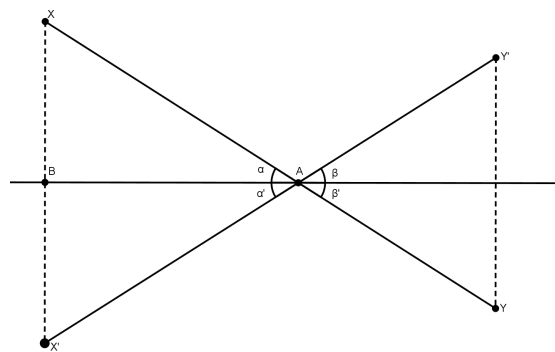


Figura 3.8: Segundo caso

Os triângulos retângulos  $ABX$  e  $ABX'$  têm o cateto  $AB$  em comum e sabemos que  $BX = BX'$ . Assim, esses triângulos são congruentes e, portanto, suas hipotenusas

têm o mesmo comprimento, isto é,  $AX = AX'$ . De forma análoga, concluímos que  $AY = AY'$ . Logo os triângulos  $AXX'$  e  $AYY'$  são isósceles e suas medianas coincidem com suas bissetrizes, ou seja,  $m(\alpha) = m(\alpha')$  e  $m(\beta) = m(\beta')$ . Por outro lado, tem-se que  $m(\alpha) + m(\alpha') = m(\beta) + m(\beta')$ , pois esses são ângulos opostos pelo vértice. Então, como  $\beta + \beta'$  é o suplemento do ângulo  $\widehat{XAY'}$ , segue que  $\alpha + \alpha'$  também é, logo  $X'$ ,  $A$  e  $Y'$  são colineares. Daí:

$$X'Y' = X'A + AY' = XA + AY = XY.$$

As propriedades que seguem decorrem da definição de reflexão na reta  $r$ . Deixamos as verificações das mesmas a cargo do leitor.

### Propriedades da Reflexão em Reta

Valem as propriedades:

- a)  $R_r(X) = X$  se, e somente se,  $X$  é ponto de  $r$ ;
- b) Se  $s$  é uma reta perpendicular a  $r$ , então  $R_r(s) = s$ ;
- c)  $R_r(R_r(X)) = X$ , para todo ponto  $X$  do plano.

### Simetria por reflexão

Seja  $\mathcal{F}$  uma figura. Consideremos  $T$  a reflexão em torno de uma reta  $r$  de  $\mathcal{F}$ . Se a isometria  $T$  é tal que  $T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ , então  $T$  é chamada **simetria por reflexão**. Nesse caso, a reta  $r$  é chamada eixo de simetria, em geral denotado por  $e$ .

### Exemplos

- a) O triângulo isósceles  $ABC$  é simétrico com relação a mediatriz da base  $BC$ , assim como em relação à altura e à mediana referente ao mesmo lado, pois as mesmas estão contidas na mediatriz;

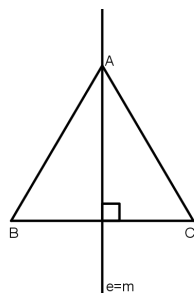


Figura 3.9

- b) A mediatriz de um segmento  $AB$  é seu eixo de simetria, ou seja, um segmento é simétrico com relação à sua mediatriz;

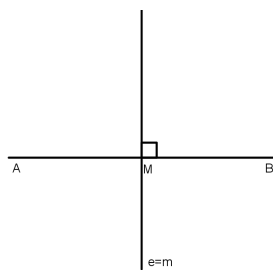


Figura 3.10

c) O ângulo é simétrico com relação à sua bissetriz;

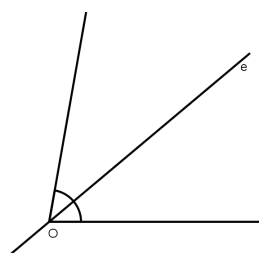


Figura 3.11

d) O trapézio isósceles é simétrico com relação à mediatriz de suas bases;

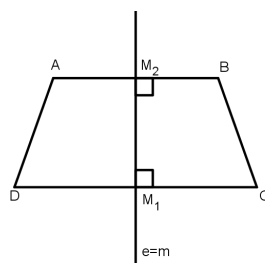


Figura 3.12

e) O losango é simétrico com relação a suas diagonais e às mediatrizes de seus lados;

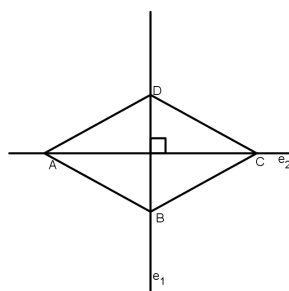


Figura 3.13

f) O retângulo é simétrico com relação às mediatrizes de seus lados;

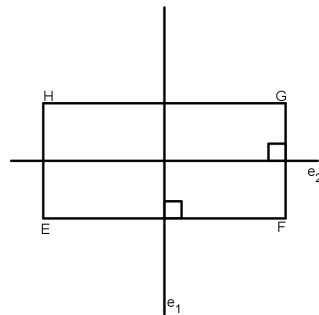


Figura 3.14

g) Um polígono regular de  $n$  lados possui  $n$  eixos de simetria;

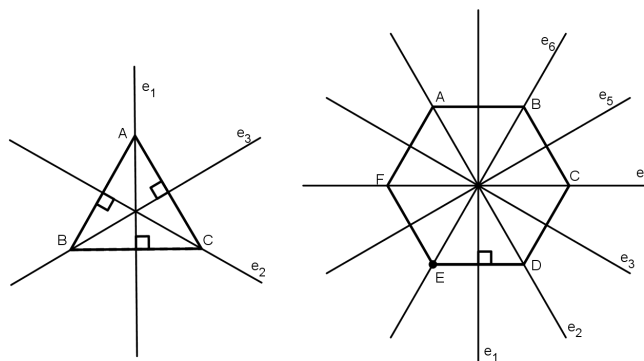


Figura 3.15

h) O quadrado possui quatro eixos de simetrias: as suas diagonais e as mediatrizes de seus lados;

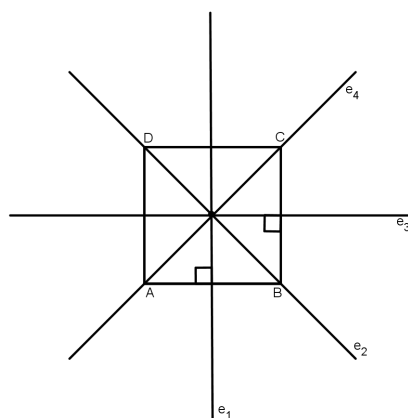


Figura 3.16

- i) A circunferência é simétrica em relação a reta suporte de qualquer um de seus diâmetros.

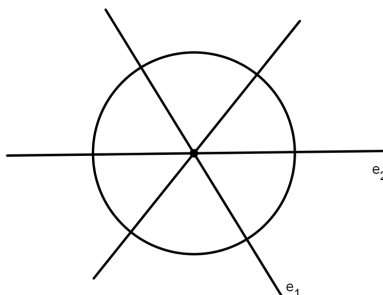


Figura 3.17

### Simetria em torno de um ponto

Seja  $A$  um ponto no plano. A **simetria em torno de um ponto  $A$**  é a isometria  $S$  tal que se  $X = A$ , então  $S_A(A) = A$  e se  $X$  é diferente de  $A$ ,  $S_A(X) = X'$  é o simétrico de  $X$  relativamente a  $A$ , isto é,  $A$  é o ponto médio do segmento  $XX'$ .

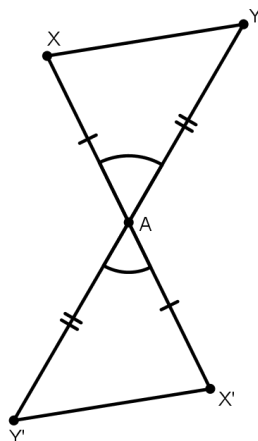


Figura 3.18

Para averiguar que  $S_A$  é uma isometria, dados  $X$  e  $Y$  pontos distintos do plano, sejam  $S_A(X) = X'$  e  $S_A(Y) = Y'$ . Os triângulos  $AXY$  e  $AX'Y'$  são congruentes pelo caso de congruência LAL, pois  $AX = AX'$ ,  $AY = AY'$  e os ângulos  $\widehat{XAY}$ ,  $\widehat{X'AY'}$  são opostos pelo vértice. Logo,  $XY = X'Y'$ , e por conseguinte,  $S_A$  é uma isometria.

### Aplicação da Reflexão em Reta

O conhecimento de reflexão em reta nos permite resolver muitos problemas geométricos, um exemplo é o problema do rio. Nele uma mulher que mora em uma casa  $A$  quer buscar água no rio  $r$  e levá-la à casa  $B$ , do mesmo lado do rio. O problema consiste em minimizar graficamente o caminho a ser feito.

**Resolução do Problema.** Primeiro fazemos a reflexão do ponto  $B$ , que representa a casa  $B$ , com relação à reta  $r$ , que representa o rio. Ao traçar a reta que conecta o

ponto  $B$  com sua imagem  $B'$ , tem-se a interseção dessa reta suporte com a o eixo de reflexão, denotada por  $Q$ . Para determinar o menor caminho, tracemos uma reta que conecta o ponto  $A$  com o ponto  $B'$ . Defina a interseção dessa reta com a reta  $r$  por  $P$ . O menor caminho é a linha poligonal que passa por  $A$ ,  $P$  e  $B$ .

Para constatar tal fato, suponhamos que exista outro caminho qualquer que minimize essa distância, cujo ponto sobre o rio é no caso representado por  $R$ . Analisaremos os triângulos  $PQB$ ,  $PQB'$ ,  $RQB$  e  $RQB'$  para provar que  $\overline{APB}$  é o caminho solução do problema.

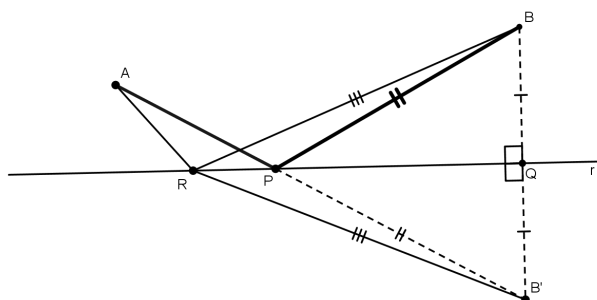


Figura 3.19

Pelo caso de congruência de triângulos L.A.L, os triângulos  $PQB$  e  $PQB'$  são congruentes, e  $RQB$  e  $RQB'$  também são pelo mesmo caso. Assim simplificamos o problema ao provar que  $AB'$  é menor que  $AR + RB'$ , o que é garantido pela desigualdade triangular. Logo, o menor caminho é  $\overline{APB}$ .

### 3.3.3 Translação

Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos do plano. A **translação**  $T_{AB}$  é isometria que leva um ponto  $X$  do plano ao ponto  $T_{AB}(X) = X'$  tal que:

- (i)  $A, B, X$  e  $X'$  é um paralelogramo se  $A, B$  e  $X$  são não colineares;
- (ii) o segmento  $XX'$  está na reta que passa por  $A, B$  e os segmentos  $AX'$  e  $BX$  têm o mesmo ponto médio, se  $A, B$  e  $X$  são colineares.

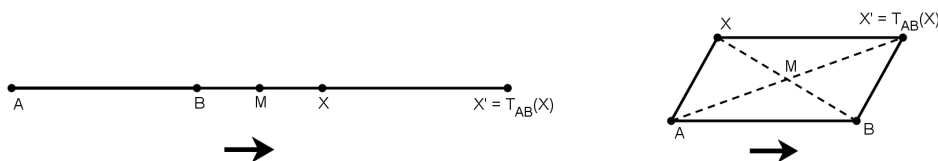


Figura 3.20

O sentido de  $X$  para  $X'$  é o mesmo de  $A$  para  $B$ . Mesmo no caso em que  $A, B$  e  $X$  são não colineares, os segmentos  $AX'$  e  $BX$  têm o mesmo ponto médio.



Cabe salientar que a translação  $T_{AB}$  é diferente de  $T_{BA}$ . A translação  $T_{BA}$  é definida da mesma forma que a  $T_{AB}$ , porém o sentido é oposto ao sentido de  $T_{AB}$ .

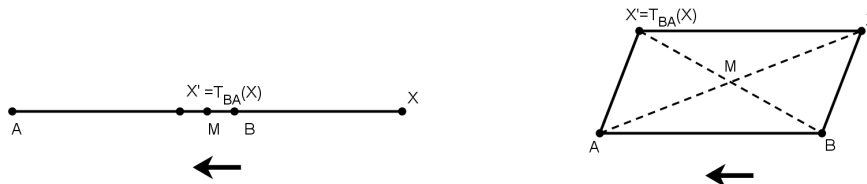


Figura 3.21

Ressaltamos que a translação  $T_{AB}$  não possui pontos fixos. Deveras, para todo ponto  $X$  no plano e  $T_{AB}(X) = X'$ , com  $X \neq X'$ , tem-se  $AB = XX'$ .

Para mostrar que a translação é de fato uma isometria, consideremos dois pontos quaisquer  $X, Y$  do plano e suas imagens  $T_{AB}(X) = X'$  e  $T_{AB}(Y) = Y'$ . Se a reta  $r$  que contém  $X$  e  $Y$  é paralela ou igual à reta que passa por  $A$  e  $B$ , então  $T_{AB}$ , restrita a  $r$ , coincide com a translação  $T'_{XX'}$  da reta  $r$  nela mesma, logo  $X'Y' = XY$ . Se  $r$  não é paralela a  $s = \overleftrightarrow{AB}$ , então  $XX'$  e  $YY'$  são opostos de um paralelogramo, portanto o mesmo acontece com  $XY$  e  $Y'X'$ . Segue então que  $X'Y' = XY$ .

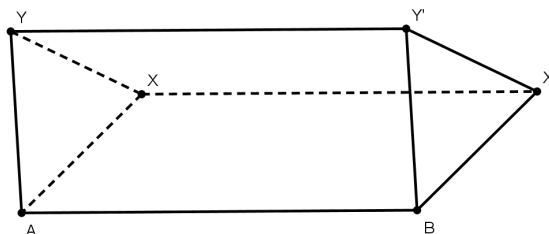


Figura 3.22

### Aplicação da Translação

Um problema que pode ser facilmente resolvido com a translação é o que segue:

São dados um ângulo  $\widehat{AOB}$  e um número positivo  $a$ . Determinemos um ponto  $R$  na semirreta  $\overrightarrow{OB}$ , com origem em  $O$  e que passa por  $B$ , e um ponto  $S$  na semirreta  $\overrightarrow{OA}$ , com origem em  $O$  e que passa por  $A$ , tal que o segmento tenha medida  $a$  e a  $m(\widehat{SRB}) = 120^\circ$ .

**Resolução do Problema.** Para resolver o problema, temos dois casos para analisar:

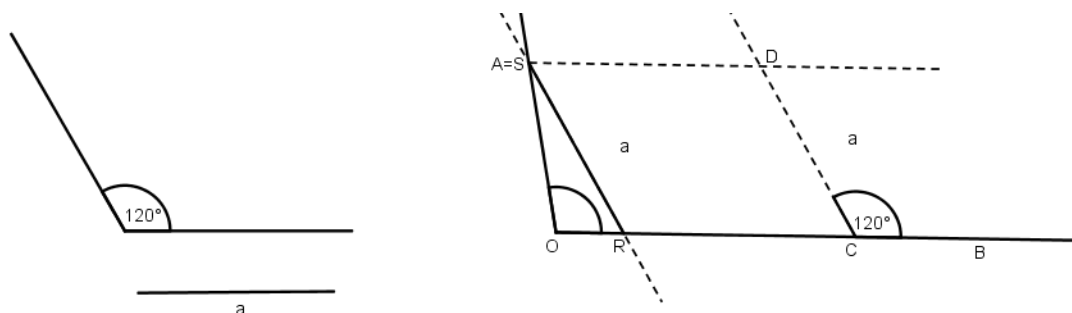
**Caso 1.** Se  $m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$ :

Basta transportamos o segmento de medida  $a$  na semirreta  $\overrightarrow{OA}$ , a partir da origem e obteremos o ponto  $S$ . Tomamos o ponto  $R$  de modo a coincidir com  $O$ . O segmento  $OS$  será a solução.

**Caso 2.** Se  $m(\widehat{AOB}) \neq 120^\circ$ :

Nesse caso, iremos considerar um ponto  $C$  tal que  $C$  pertence à reta que passa por  $O$  e  $B$  e está entre esses pontos. Então transportamos o segmento de medida  $a$  para uma semirreta de origem em  $C$ , de modo que o ângulo formado entre o segmento e a reta que passa pelos pontos  $C$  e  $B$  seja de  $120^\circ$ , assim fica determinado um ponto  $D$ .

Para obter  $S$ , basta tomar a interseção da reta paralela à reta que passa pelos pontos  $O$  e  $B$ , que passa por  $D$ , com a reta que passa pelos pontos  $O$  e  $A$ .



**Figura 3.23**

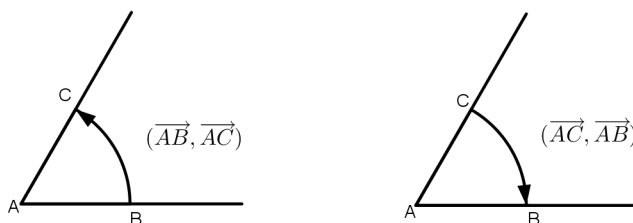
O ponto  $R$  é obtido pela translação  $T_{DS}$  do ponto  $C$ .

### 3.3.4 Rotação

Para definir a rotação é necessário o conhecimento de ângulo orientado.

**Definição 3.3: (Ângulo Orientado)** É um ângulo em que o lado inicial (origem) e o lado final (extremidade) estão bem definidos.

Assim definido, podemos classificar os ângulos orientados como positivos, ângulos orientados no sentido anti-horário, ou como negativos, ângulos orientados no sentido horário.



**Figura 3.24:** O ângulo da esquerda é positivo, enquanto o da direita é negativo.

Para o estudo de rotação, precisaremos considerar ângulos com variação de 0 a 180, que podem ser tomados negativamente se o sentido do ângulo orientado for horário. E com as definições e referenciais adotados podemos finalmente definir a rotação.

**Definição 3.4: (Rotação)** Sejam  $O$  um ponto do plano e  $\theta$  um número real maior que  $-180$  e menor ou igual a  $180$ . A rotação de centro  $O$  e ângulo  $\theta$  é a isometria  $\Delta_{O,\theta}$  que deixa fixo o ponto  $O$  e leva o ponto  $X$ , se  $X$  é diferente de  $O$ , no ponto  $X' = \Delta_{O,\theta}(X)$ , tal que  $OX = OX'$  e a medida do ângulo orientado  $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX'})$ , se  $\theta$  é diferente de  $0$  e de  $180$ . Além disso, se  $\theta = 180^\circ$  temos que  $OX = OX'$ , sendo  $O$  o ponto médio do segmento  $XX'$ .

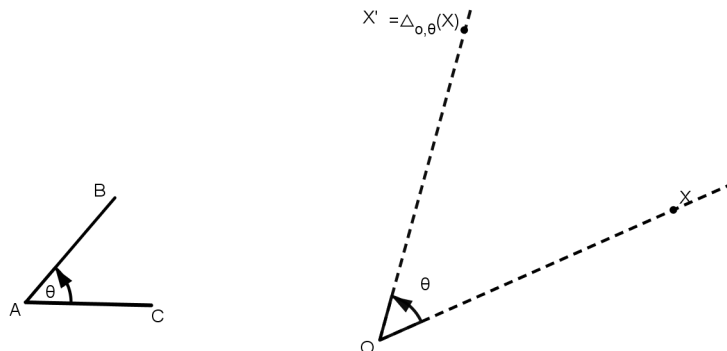


Figura 3.25

Se considerarmos o centro de rotação e o ângulo  $\theta$  dados na definição e aplicarmos  $\Delta_{O,\theta}$  a dois pontos do plano  $X$  e  $Y$ , o sentido de rotação de  $X$  para  $\Delta_{O,\theta}(X) = X'$  deve ser o mesmo que de  $Y$  para  $\Delta_{O,\theta}(Y) = Y'$ . Em termos precisos, queremos dizer que os ângulos  $\widehat{Y'OX}$  e  $\widehat{Y'OX'}$  terão a mesma bissetriz.

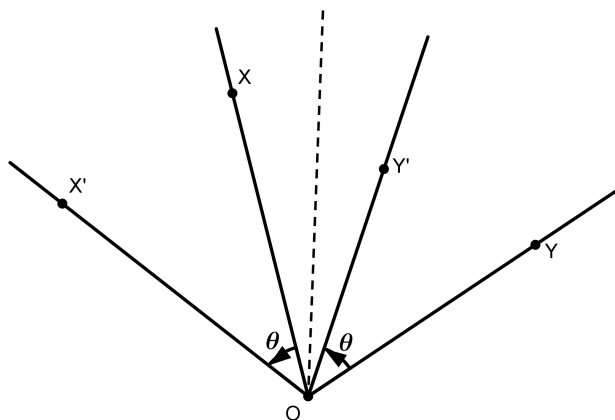


Figura 3.26

A rotação é de fato uma isometria. De fato, sejam  $X, Y$  dois pontos no plano, diferentes de  $O$ , e o ângulo  $\theta$ . Sejam  $\Delta_{O,\theta}(X) = X', \Delta_{O,\theta}(Y) = Y'$  suas imagens.

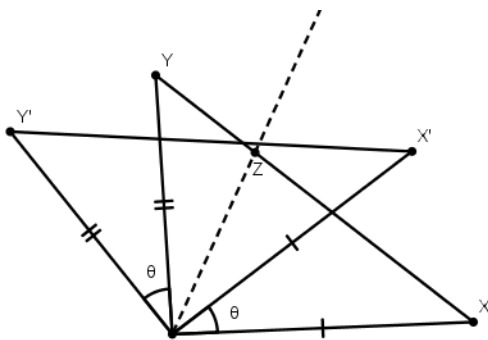


Figura 3.27

Como os ângulos  $\widehat{X'OY}$  e  $\widehat{X'OY'}$  têm a mesma bissetriz, logo  $m(\widehat{X'OZ}) = m(\widehat{ZOY'})$ . Tem-se também, por definição, que  $OX = OX'$  e  $OY = OY'$ . Concluímos pelo caso L.A.L de congruência que os triângulos  $XOY$  e  $X'OY'$  são congruentes. Portanto,  $XY = X'Y'$ , isto é,  $\Delta_{O,\theta}$  é uma isometria, cujo  $O$  é o único ponto fixo.

Vejam os exemplos de como aplicar a rotação para transformações no plano.

**Exemplo 3.3.1:** Rotacionar um segmento  $AB$  em  $75^\circ$ ,  $\Delta_{O,75^\circ}$ , em torno de um ponto  $O$  dado.

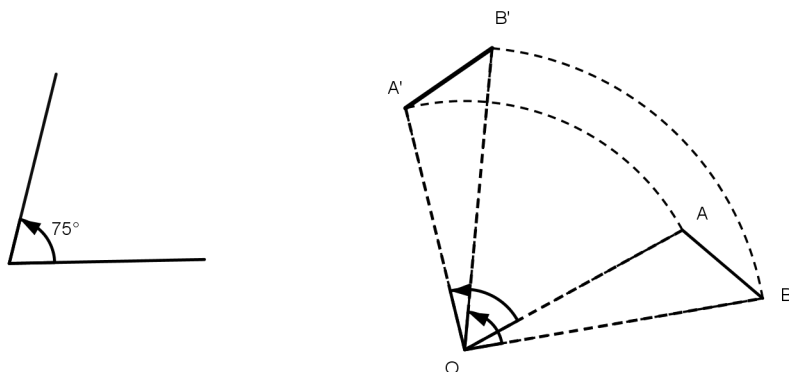


Figura 3.28

**Solução.** Traçamos os segmentos de reta  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  e fazemos a rotação desses segmentos. Como  $OA = OA'$  e  $OB = OB'$  identificamos  $\Delta_{O,75^\circ}(A) = A'$  e  $\Delta_{O,-120^\circ}(B) = B'$ . O segmento determinado por  $A'$  e  $B'$  será a solução.

**Exemplo 3.3.2:** Realizar a rotação  $\Delta_{O,-120^\circ}$  da semicircunferência, de diâmetro  $AB$ , dada ao redor do ponto  $O$  dado.

**Solução** Primeiramente, determinamos o centro dessa semicircunferência, ou seja, determinar o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Sejam  $\Delta_{O,-120^\circ}(A) = A'$ ,  $\Delta_{O,-120^\circ}(B) = B'$  e  $\Delta_{O,-120^\circ}(C) = C'$  as imagens da rotação dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente, obtidos da mesma forma que no exemplo anterior, porém no sentido anti-horário. A solução do problema é a semicircunferência de centro  $C'$  e raio  $A'C'$ .

A rotação  $\Delta_{O,\theta}$  na qual  $\theta = 180^\circ$  é chamada de **meio giro** ou **reflexão em relação**

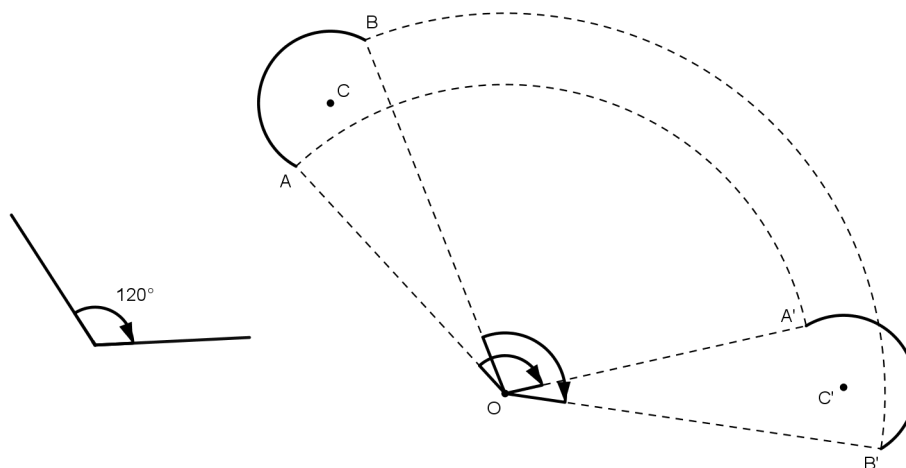


Figura 3.29

ao ponto fixo  $O$ . Então dado um ponto  $P$  no plano, a imagem desse ponto pela rotação,  $\Delta_{O,180^\circ}(P) = P'$ , é tal que  $O$  é ponto médio do segmento  $PP'$ . Em suma, a rotação meio giro coincide com a simetria  $S_O$ , em torno do ponto  $O$ .

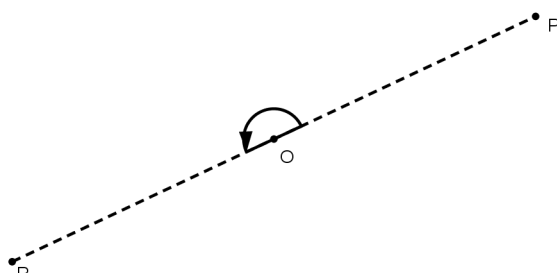


Figura 3.30

### Simetria de Rotação

Uma figura tem **simetria de rotação** de um ângulo  $\theta$ , ou tem **simetria  $\theta$ -rotacional**, quando coincide com sua imagem pela rotação do ângulo  $\theta$  ao redor do seu centro.

Observemos que uma figura possui simetria  $\theta$ -rotacional se, e somente se, possui simetria  $-\theta$ -rotacional. Basta considerar o valor absoluto de  $\theta$ .

**Exemplo 3.3.3:** O paralelogramo possui simetria 180-rotacional.

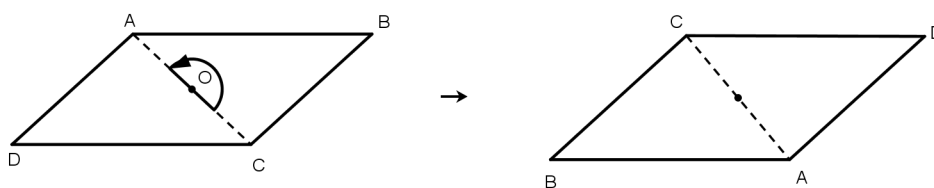


Figura 3.31

**Exemplo 3.3.4:** Em geral, um polígono regular de  $n$  lados possui simetria  $\theta$ -rotacional, em que  $\theta = i\frac{360}{n}$ ,  $i$  é um número inteiro positivo, se  $n$  for par  $i = 0, \dots, \frac{n}{2}$  e se  $n$  for ímpar  $i = 0, \dots, \frac{n-1}{2}$ . Por exemplo, o quadrado possui simetria 90-rotacional e 180-rotacional, já o pentágono possui simetria 72-rotacional e também 144-rotacional.

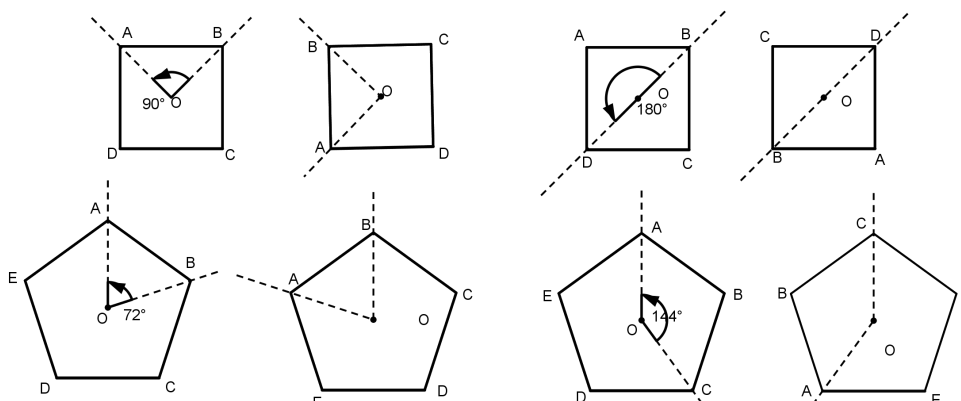


Figura 3.32

### 3.3.5 Reflexão com deslizamento

Sejam  $v$  um vetor de comprimento  $AB$  não nulo e  $r$  uma reta paralela ao vetor  $v$ . A **reflexão com deslizamento**, determinada pelo vetor  $v$  e pela reta  $r$ , é a isometria obtida ao fazer a reflexão  $R_r$  seguida da translação  $T_{AB}$ . A reflexão com deslizamento, assim como a translação, não possui ponto fixo.

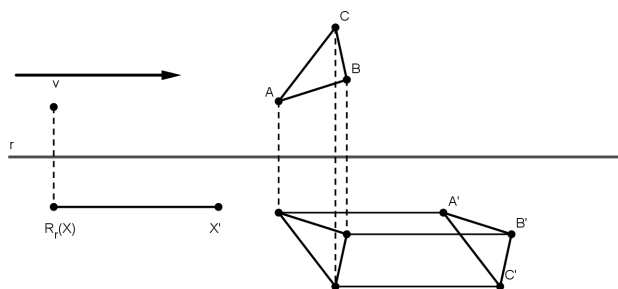


Figura 3.33

Uma observação a ser levada em conta é que como o vetor  $v$  é paralelo a  $r$ , pode-se mostrar que  $T_{AB} \circ R_r = R_r \circ T_{AB}$

Devidamente apresentadas os tipos de isometria, podemos destacar propriedades que caracterizam as mesmas. Entretanto, se precisamos enunciar alguns resultados a respeito das isometrias na reta.

### 3.3.6 Isometrias na reta

**Teorema 3.3:** Sejam  $r$  uma reta e  $T : r \rightarrow r$  uma isometria. Se  $T$  possui dois pontos fixos distintos, então ela é a identidade.

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  pontos de  $r$  tais que  $T(A) = A$  e  $T(B) = B$ . Suponhamos que exista um ponto  $X$  pertencente a  $r$ , de modo que  $T(X) = X'$  e  $X'$  é diferente de  $X$ . Por definição, temos  $AX = T(A)T(X) = AX'$ , ou seja, o ponto  $A$  seria o ponto médio do segmento  $XX'$ . De forma análoga, tem-se que  $B$  também será o ponto médio do segmento  $XX'$ . Portanto,  $A = B$ . Isto é uma contradição, pois  $A \neq B$ . Logo  $T$  é a identidade.  $\square$

**Teorema 3.4:** Sejam  $S, T : r \rightarrow r$  isometrias, em que  $r$  é uma reta. Se existirem dois pontos distintos  $A$  e  $B$  em  $r$  tais que  $S(A) = T(A)$  e  $S(B) = T(B)$ , então  $S = T$ , isto é,  $S(X) = T(X)$  para todo  $x$  pertencente a  $r$ .

*Demonstração.* De fato, ao tomarmos a isometria  $R = T^{-1} \circ S : r \rightarrow r$ , notamos que  $R(A) = A$  e  $R(B) = B$ . Portanto a isometria  $R$  é a identidade, assim concluímos que  $S = T$ .  $\square$

### 3.3.7 Propriedades

**Teorema 3.5:** Se uma isometria  $T$ , no plano, possui três pontos fixos não colineares, então  $T$  é a identidade.

*Demonstração.* De fato, sejam  $A, B$  e  $C$  pontos não colineares no plano tais que  $T(A) = A$ ,  $T(B) = B$  e  $T(C) = C$ . Tomemos  $r$  a reta determinada por  $A$  e  $B$ , e  $s$  a reta determinada por  $A$  e  $C$ . A imagem de  $r$  por essa isometria é reta que passa por  $T(A) = A$  e  $T(B) = B$ , logo  $T(r) = r$ . Portanto se restringirmos a isometria  $T$  a reta  $r$ , teremos uma isometria de uma reta com dois pontos fixos. Pelo Teorema 3.3 tem-se que  $T(X) = X$  para todo  $X$  pertencente a  $r$ . Analogamente, provamos que  $T(Y) = Y$  para todo  $Y$  pertencente a  $s$ . Consideremos agora um ponto  $Z$  e por ele uma reta  $t$  que intercepte  $r$  e  $s$  nos pontos  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Como  $T(X) = X$  e  $T(Y) = Y$ , concluímos que  $T$  fixa também todos os pontos da reta  $t$ . Em particular,  $T(Z) = Z$ . Pelo fato de  $Z$  ter sido tomado arbitrariamente no plano, segue que  $T$  é a identidade.  $\square$

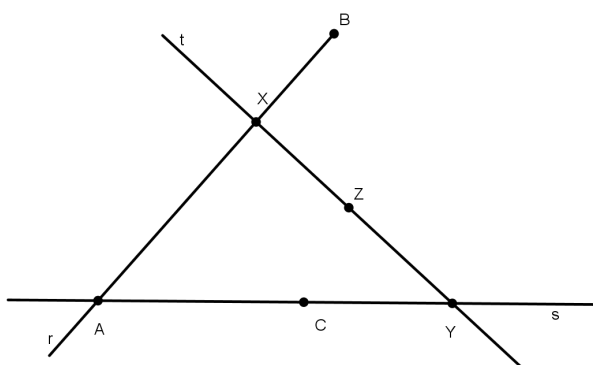


Figura 3.34

**Teorema 3.6:** Sejam  $S, T$  isometrias. Se existem no plano três pontos não colineares  $A, B$  e  $C$  tais que  $S(A) = T(A)$ ,  $S(B) = T(B)$  e  $S(C) = T(C)$ , tem-se que  $S = T$ , isto é,  $S(X) = T(X)$  para todo ponto  $X$  do plano.

*Demonstração.* Com efeito, nas hipóteses acima, se compormos a isometria  $S^{-1}$  com a  $T$ , a nova isometria deixa fixa os pontos  $A, B$  e  $C$ , logo pelo Teorema 3.5  $S^{-1} \circ T$  é a identidade. Então, tem-se que  $S = T$ . □

**Teorema 3.7:** Se uma isometria  $T$  possui dois pontos fixos distintos, então ou  $T$  é a identidade ou é a reflexão em torno da reta que contém esses pontos.

*Demonstração.* Sejam  $A, B$  pontos distintos no plano tais que  $T(A) = A$  e  $T(B) = B$ . Então  $T$  deixa fixo os pontos da reta  $r$  determinados pelos pontos  $A$  e  $B$ . Fixemos agora um ponto  $C$  fora de  $r$ . Se  $T(C) = C$ , caímos no caso do Teorema 3.5, ou seja,  $T$  é a identidade. Se  $T(C) = C'$ , com  $C'$  diferente de  $C$ , então temos que  $AC = AC'$  e  $BC = BC'$ , e  $r$  é, portanto, mediatriz do segmento  $CC'$ , logo  $R_r(C) = C'$ . Logo  $T$  coincide, nos três pontos com a reflexão em torno de  $r$ , isto é,  $T = R_r$ . Esta conclusão segue do Teorema 3.6. □

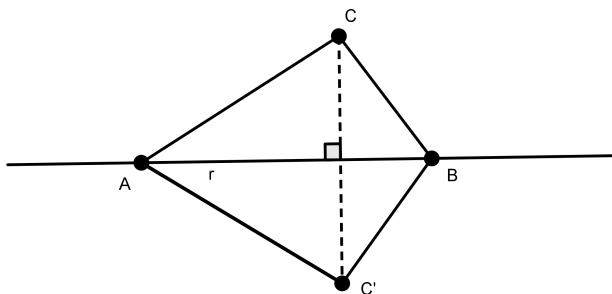


Figura 3.35

**Teorema 3.8:** Sejam  $S, T$  isometrias. Se existem no plano dois pontos distintos  $A$  e  $B$  tais que  $S(A) = T(A)$  e  $S(B) = T(B)$ , então ou  $S = T$  ou  $S = T \circ R_r$ , em que  $R_r$  é a reflexão na reta  $r$  determinadas por  $A, B$ .



*Demonstração.* Ao tomar a isometria inversa de  $T$ ,  $T^{-1}$ , e compormos ela com  $S$ , a isometria resultante fixa dois pontos distintos. Logo, ou  $T^{-1} \circ S$  é a identidade ou  $T^{-1} \circ S = R_r$ . Nesse último caso temos  $S = T \circ R_r$ .  $\square$

# Homotetia

---

Neste capítulo, discutiremos sobre a homotetia, que assim como a isometria é uma transformação no plano. O que iremos comprovar é que, enquanto na isometria há uma relação de congruência entre uma figura e sua imagem, na homotetia existe uma relação de semelhança. Além de constarmos um resultado interessante sobre duas circunferências e homotetia. Esse capítulo teve como referência o item [5] das referências bibliográficas.

## 4.1 Homotetia

**Definição 4.1:** Fixados um ponto  $V$  do plano e um número real  $k$  diferente de zero, a **homotetia** de centro  $V$  e razão  $k$ , denotada por  $H_{V,k}$ , é a transformação no plano que associa cada ponto  $P$  a um ponto  $H_{V,k}(P) = P'$  tal que:

- a)  $H_{V,k}(V) = V$ ;
- b)  $VP' = |k|VP$ ;
- c) Os pontos  $V$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares. Se  $k$  é maior do que 0,  $P'$  está na semirreta de origem  $V$  e que contém  $P$ ; se  $k$  é menor do que 0,  $V$  está entre  $P$  e  $P'$ .

O ponto  $P'$  é chamado homotético de  $P$  da homotetia de centro  $V$  e razão  $k$ .

Como  $k$  pode assumir valores positivos e negativos, podemos classificar a homotetia de duas formas. Se  $k$  é um número positivo, a homotetia é chamada de **homotetia direta** e se  $k$  é negativo de **homotetia inversa**.

O fato de a homotetia ser uma transformação no plano traz a tona uma questão natural de qual seria a aplicação inversa da mesma. É fácil demonstrar que a transformação inversa da homotetia  $H_{V,k}$  é a homotetia  $H_{V,\frac{1}{k}}$ .

Seja  $P$  um ponto qualquer do plano, ao aplicarmos a homotetia a esse ponto, por definição, é válida a igualdade  $VP' = |k|VP$ . Por outro lado, ao tomar a possível homotetia inversa  $H_{V,\frac{1}{k}}$  do ponto  $P'$ , temos a segunda igualdade  $VP'' = |\frac{1}{k}|VP'$ . Logo, como  $P$  e  $P''$  pertencem a uma mesma reta, além disso,  $P = P''$ .

### 4.1.1 Os pontos V, P e P'

Dada uma homotetia  $H_{V,k}$ , a posição que os pontos  $V$ ,  $P$  e  $P'$  irão ocupar no plano depende diretamente da razão  $k$ . Fazemos assim o estudo do posicionamento desses pontos ao variar o valor de  $k$ .

- (i) Se  $k = 1$ , temos a transformação identidade  $H_{V,1}$ , ou seja, os pontos  $P'$  e  $P$  são coincidentes.
- (ii) Se  $k$  está entre 0 e 1, o ponto  $P'$  está localizado entre  $V$  e  $P$ .
- (iii) Se  $k$  é maior do que 1, o ponto  $P$  está entre  $V$  e  $P'$ .
- (iv) Se  $k$  é menor do que 0, o ponto  $V$  está entre  $P$  e  $P'$ .
- (v) No caso especial em que  $k = -1$ , o homotético coincide com a rotação  $\Delta_{V,180}$  do ponto  $P$ .

#### Exemplos

Ilustremos cada caso citado anteriormente para verificar as posições de  $V, P$  e  $P'$ , dada uma razão  $k$ .

- (a) Para  $k = 1$

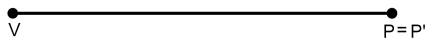


Figura 4.1

- (b) Para  $k = \frac{3}{4}$

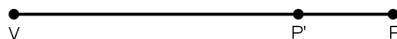


Figura 4.2

- (c) Para  $k = 2$



Figura 4.3

- (d) Para  $k = -\frac{2}{3}$

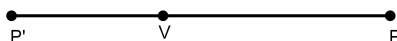


Figura 4.4

(e) Para  $k = -1$

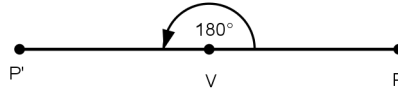


Figura 4.5

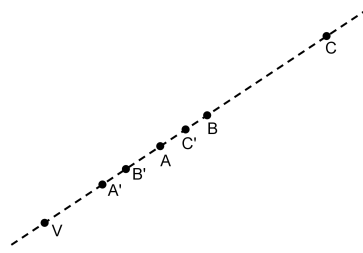
### 4.1.2 Propriedades

Dados um ponto  $V$  do plano e um número real  $k$ ,  $k \neq 0$ , a homotetia  $H_{V,k}$  possui as propriedades que seguem:

- (a)  $H_{V,k}$  transforma pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se  $A, B$  e  $C$  são pontos tais que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então  $H_{V,k}(B)$  está entre  $H_{V,k}(A)$  e  $H_{V,k}(C)$ , ou seja,  $H_{V,k}$  preserva a relação de “estar entre”;
- (b)  $H_{V,k}$  leva retas em retas. E por consequência, transforma semirretas em semirretas, transforma ângulos em ângulos e segmentos em segmentos;
- (c) Sejam  $r$  uma reta e  $H_{V,k}(r) = r'$ . Temos que  $r'$  é uma reta paralela a  $r$ , se  $V$  não pertence a  $r$ , e  $r'$  coincide com  $r$ , se  $V$  pertence a  $r$ ;
- (d) Se  $V, A$  e  $B$  são pontos colineares, então o segmento  $\overline{A'B'}$ , homotético do segmento  $\overline{AB}$ , é tal que  $A'B' = |k|AB$  e é paralelo a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , quando  $k$  é diferente de 1. Se  $V, A$  e  $B$  forem colineares, então o segmento  $\overline{A'B'}$  está contido na reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ ;
- (e) A figura homotética de um triângulo  $ABC$  é um triângulo  $A'B'C'$ , semelhante a ele, com razão de semelhança igual a  $|k|$ ;
- (f) A homotetia preserva medidas de ângulos;
- (g) A figura homotética de uma circunferência de raio  $r$  é também uma circunferência de raio  $r' = |k|r$ ;
- (h) A homotetia preserva o paralelismo entre retas, ou seja, se  $r$  e  $s$  são retas paralelas, então  $H_{V,k}(r)$  e  $H_{V,k}(s)$  são retas paralelas.

*Demonstração.* (a) Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos colineares e  $A', B'$  e  $C'$  suas imagens, respectivamente, pela homotetia  $H_{V,k}$ .

Da colinearidade dos pontos  $A, B$  e  $C$ , sabemos que  $AC = AB + BC$ , pois  $B$  está entre  $A$  e  $C$ . Por definição de homotetia,  $A'C' = |k|AC = |k|(AB + BC) = |k|AB + |k|BC = A'B' + B'C'$ , isto é,  $B'$  está entre  $A'$  e  $C'$  e, portanto, a homotetia preserva a colinearidade entre os pontos.

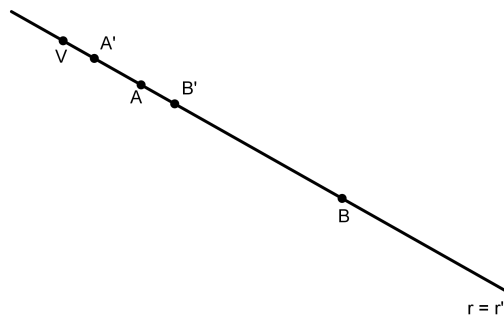


**Figura 4.6**

- (b) Provaremos apenas que a homotetia leva reta em retas, os demais casos seguem da propriedade *a* e do que iremos provar. Sejam  $r$  uma reta,  $A$  e  $B$  dois de seus pontos e  $A'$  e  $B'$  suas imagens pela homotetia. Do item anterior, segue que  $H_{V,k}(r)$ , em que  $r$  é a reta determinada por  $A$  e  $B$ , está contida na reta que passa pelos seus homotéticos.

De modo análogo,  $H_{V,\frac{1}{k}}(r)$ , em que  $r$  é a reta que passa por  $A'$  e  $B'$  está contida na reta que passa por  $A$  e  $B$ . Logo, a reta que passa por  $A'$  e  $B'$  está contida em  $H_{V,k}(r)$ . Concluimos que a imagem da reta que passa por  $A$  e  $B$  é também uma reta que passa pelos homotéticos de  $A$  e  $B$ .

- (c) Se  $V$  pertence a  $r$ , então ao aplicar a dois pontos distintos  $A$  e  $B$  da reta, as imagens  $A'$  e  $B'$  pela homotetia, respectivamente, pertencerão a  $r$ , por definição, e fica determinado que  $H_{V,k}(r) = r'$ , em que  $r'$  passa por  $A$  e  $B$ . Logo  $r = r'$ .



**Figura 4.7**

Suponhamos agora que  $V$  não pertença a  $r$ . Consideremos os mesmos pontos e suas imagens, como anteriormente, porém  $r'$  é uma reta distinta de  $r$ . Tracemos duas semirretas com início em  $V$  e passando pelos pontos  $A$  e  $B$ . Por definição, temos que  $VA' = |k|VA$  e  $VB' = |k|VB$ , deste modo, os triângulos  $AVB$  e  $A'VB'$  são semelhantes pelo caso LAL, logo  $A'B' = |k|AB$ . Pela Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, segue que  $r$  é paralela a  $r'$ .

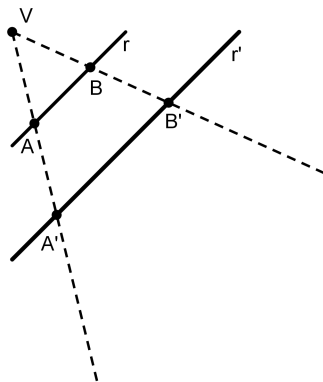


Figura 4.8

- (d) A demonstração é análoga à anterior, pois o mesmo é um caso particular aplicado aos dois pontos considerados.
- (e) Sejam  $V$  um ponto fixo do plano e  $ABC$  um triângulo dado. Tracemos três semirretas com o origem em  $V$  e que contenha os vértices do triângulo  $ABC$ . Ao tomar os homotéticos de cada um dos vértices, temos que  $H_{V,k}(ABC) = A'B'C'$ , também um triângulo.

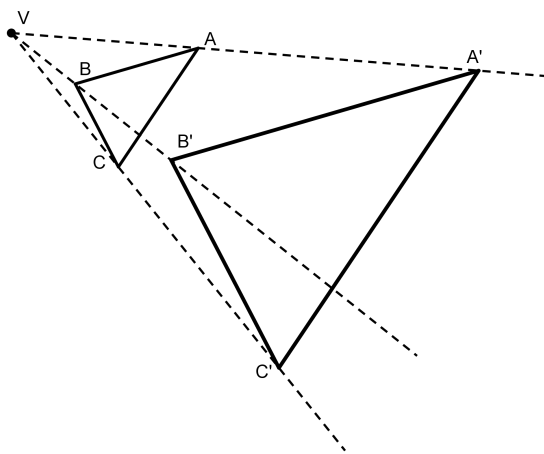


Figura 4.9

Por (d), seguem as seguintes igualdades

$$A'B' = |k|AB, B'C' = |k|BC, A'C' = |k|AC,$$

ou seja,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = |k|.$$

Logo, os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes pelo caso L.L.L com razão de semelhança  $|k|$ .

- (f) Sejam  $V$  um ponto fixo do plano e  $\alpha$  um ângulo com vértice em  $O$ . Tem-se que o homotético de  $\alpha$  é um ângulo  $\alpha'$ . Consideremos os pontos  $A$  e  $B$ , em lados opostos de  $\alpha$  e  $A'$  e  $B'$  as imagens pela homotetia  $H_{V,k}$  de  $A$  e  $B$ , respectivamente.

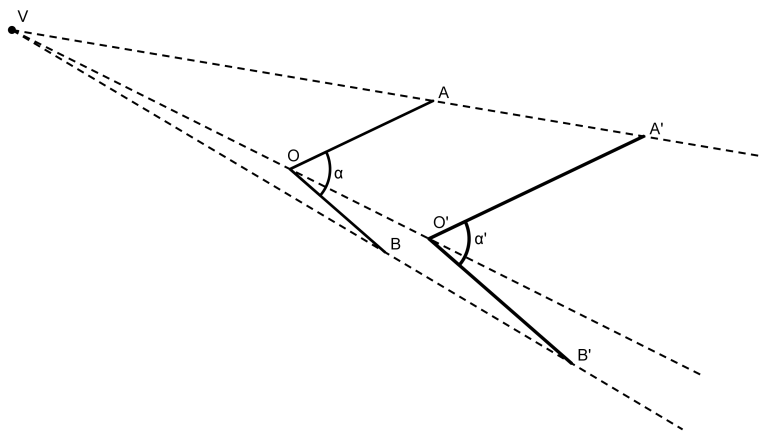


Figura 4.10

Os triângulos  $AOB$  e  $A'O'B'$  são semelhantes pelo caso L.L.L. Por conseguinte, os ângulos correspondente aos lados homólogos  $AB$  e  $A'B'$  são congruentes, isto é,  $m(\alpha) = m(\alpha')$ .

- (g) Sejam  $\mathcal{C}(O,r)$  uma circunferência,  $P$  um ponto pertencente a ela,  $O'$  e  $P'$  suas imagens pela homotetia  $H_{V,k}$ .

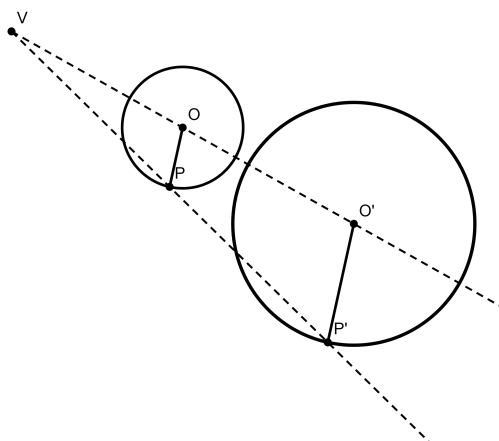


Figura 4.11

Por (d), temos  $O'P' = |k|OP = |k|r$ . Afirmamos que  $H_{V,k}(\mathcal{C}(O,r)) = \mathcal{C}(O',r')$ , em que  $r' = |k|r$ . De fato, seja  $B$  um ponto qualquer de  $\mathcal{C}(O,r)$  e  $H_{V,k}(\overline{OB}) = \overline{O'B'}$ . Então  $O'B' = |k|OB = |k|r = r'$  e, portanto,  $B'$  pertence a  $\mathcal{C}(O',r')$ . Seja  $R$  um ponto de  $\mathcal{C}(O',r')$ . Temos  $O'R = |k|r = r'$ . Apliquemos a  $\overline{O'R}$  a homotetia inversa de  $H_{V,k}$ , ou seja,  $H_{V,\frac{1}{k}}$ . Logo,  $OQ = |\frac{1}{k}|O'R = |\frac{1}{k}||k|r = r$  e, portanto,  $Q$  pertence  $\mathcal{C}(O,r)$ .

- (h) Sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas e  $V$  o centro de homotetia. Temos dois casos para analisar. No primeiro,  $V$  pertence a uma das retas e no segundo não pertence a nenhuma delas. Provemos o primeiro caso; sem perda de generalidade, suponhamos que  $V$  pertença a reta  $r$ . Tomemos em  $s$  dois pontos distintos  $A$  e  $B$  e sejam  $H_{V,k}(A) = A'$ ,  $H_{V,k}(B) = B'$ .

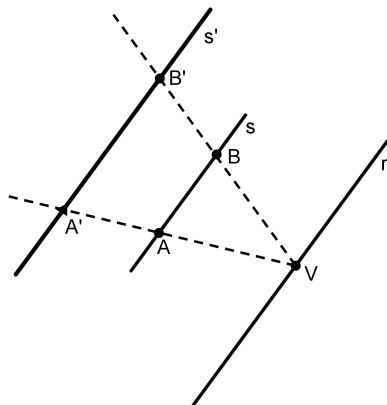


Figura 4.12

É fácil ver que a  $H_{V,k}(s)$  é a reta  $s'$  que passa pelos pontos  $A'$  e  $B'$ . Como  $V$  não pertence a  $s$ , pelo item (d),  $s'$  é uma reta paralela a  $s$ . Ademais, o mesmo garante que  $H_{V,k}(r)$  é a própria reta  $r$ . Logo, por transitividade do paralelismo,  $s'$  é paralela a  $r$ .

Para o segundo caso, além dos pontos  $A$  e  $B$  e suas imagens consideradas, tomemos dois pontos  $C$  e  $D$  em  $r$ , sendo  $H_{V,k}(C) = C'$ ,  $H_{V,k}(D) = D'$  suas respectivas imagens. A imagem de  $H_{V,k}(r)$ , nesse caso, é reta que passa por  $C'$  e  $D'$ .

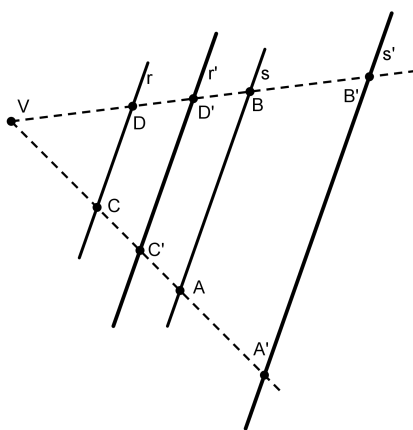


Figura 4.13

Para provar que  $r'$  é paralela a  $s'$ , exploraremos as propriedades dos triângulos  $AVB$ ,  $A'VB'$ ,  $CVD$  e  $C'VD'$ . Da definição, segue que  $\frac{VA}{VA'} = \frac{VB}{VB'} = \frac{VC}{VC'} = \frac{VD}{VD'} = |k|$ . Portanto, pelo caso de semelhança LAL, os triângulos  $AVB$  e  $A'VB'$  são semelhantes, e também  $CVD$  e  $C'VD'$  são. Pelo Teorema 2.2,



tem-se que  $r$  é paralela a  $r'$  e  $s$  é paralela a  $s'$ . Donde, por transitividade, concluímos que  $r'$  é paralela a  $s'$ .

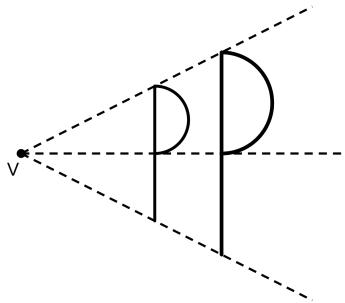
□

### 4.1.3 Homotetia e Semelhança

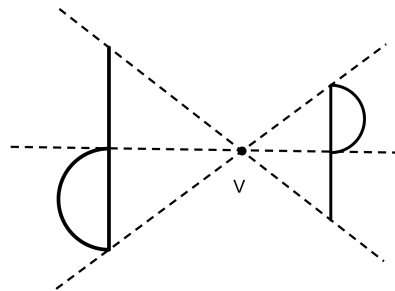
As propriedades apresentadas nos permitem concluir que, em geral, uma homotetia transforma qualquer figura  $\mathcal{G}$  em uma figura  $\mathcal{G}'$  semelhante a ela, com a razão igual a da homotetia  $H_{V,k}$ . Dessa forma, podemos apresentar uma definição para figuras semelhantes.

**Definição 4.2:** Duas figuras  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  no plano são congruentes se existe uma homotetia  $H_{V,k}$  tal que  $\mathcal{G}$  é a imagem de  $\mathcal{F}$  por essa homotetia.

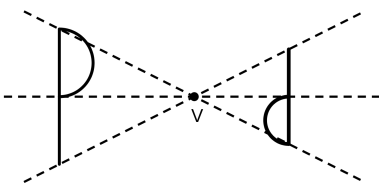
Ademais, se  $|k| > 1$ ,  $\mathcal{G}'$  é uma ampliação de  $\mathcal{G}$ . Se  $|k| = 1$ ,  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}'$  serão figuras congruentes, enquanto se  $|k|$  assume valores entre 0 e 1  $\mathcal{G}'$  é uma redução da figura  $\mathcal{G}$ . Ao considerar os possíveis valores para  $k$  podem ocorrer seis casos, como seguem.



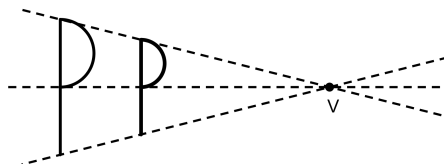
(a)  $|k| > 1, k > 0$ .



(b)  $|k| > 1, k < 0$ .



(c)  $0 < |k| < 1, k < 0$ .



(d)  $0 < |k| < 1, k > 0$ .

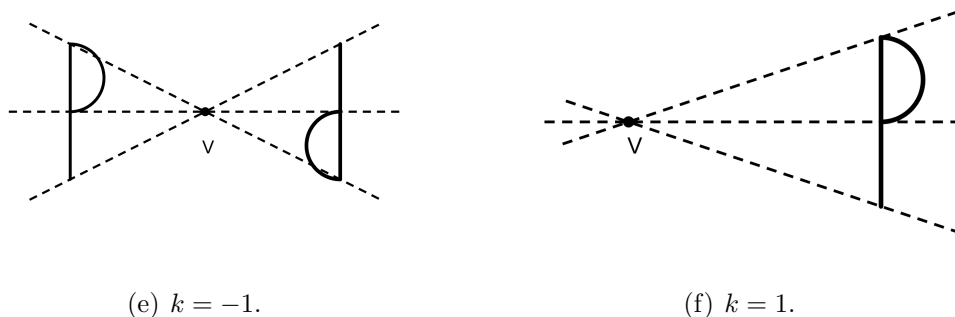


Figura 4.14

### 4.1.4 Aplicação da Homotetia

O entendimento da homotetia e de suas propriedades possibilita caminhos mais fáceis para a resolução de problemas. Vejamos um exemplo.

**Problema.** Dado um triângulo  $ABC$ , inscreva nele um retângulo áureo tal que um de seus lados maiores esteja contido no lado  $BC$  do triângulo.

**Resolução.** Construção:

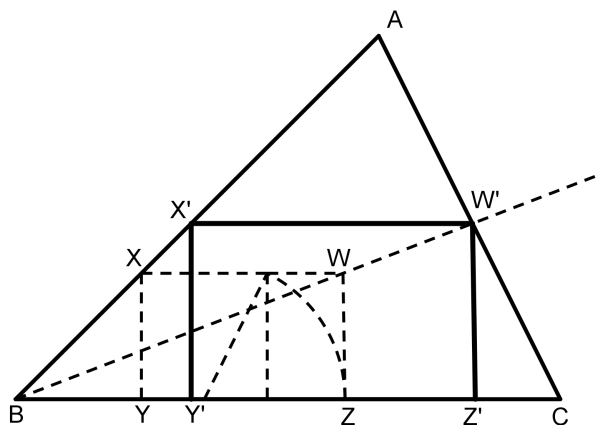


Figura 4.15

Primeiro traçamos um segmento perpendicular à base  $BC$  tal que uma das extremidades esteja no lado  $AB$ , a qual denotamos por  $X$ , e a outra no lado  $BC$ ,  $Y$ . Então, construímos um retângulo áureo  $XYZW$  de lado menor  $XY$ , como apresentado em 2.0.9.

Em seguida, determinamos o ponto  $W'$  que será a interseção da semirreta de origem  $B$  e que contém o ponto  $W$ . Esse ponto  $W'$  é um dos vértices do retângulo desejado. Para determinar os outros vértices, aplicamos a homotetia  $H_{B,k}$ , em que  $k = \frac{BW'}{BW}$ , aos demais vértices de  $XYZW$ .

O retângulo  $X'Y'Z'W'$  é a solução para o problema. De fato, um dos lados maiores está contido em  $BC$  e o quadrilátero  $X'Y'Z'W'$  é um retângulo, pois os pontos  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  e  $W'$  são homotéticos de  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  e  $W$ , respectivamente. Por propriedades,  $H_{B,k}$  preserva o paralelismo entre os segmentos e também a medida dos ângulos. Além

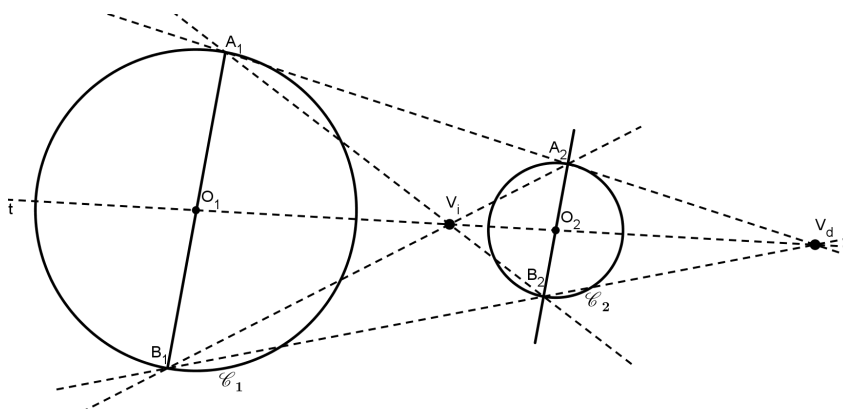
disso, a propriedade (d) da seção Propriedades, assegura que  $\frac{X'W'}{Z'W'} = \frac{kXW}{kZW} = \frac{XW}{ZW} = \phi$ .

### 4.1.5 Homotetia e Circunferências

A propriedade (g), apresentada na seção Propriedades, garante que a figura homotética de uma circunferência é uma circunferência. Mas o resultado é ainda mais geral, o que provaremos é que quaisquer duas circunferências são sempre homotéticas, seja por uma homotetia direta ou inversa. Para provar esse fato, faremos o passo a passo para determinar os centros de homotetia e a razão  $k$ . Esse argumento que utilizaremos é necessário e suficiente, visto que dispostos desse ponto e dessa razão, a homotetia é uma transformação no plano bijetora. Denotaremos por  $V_i$  e  $V_d$  os centros da homotetia inversa e da homotetia direta, respectivamente.

Sejam  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(O_1, r_1)$  e  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(O_2, r_2)$  duas circunferências dadas. Existem cinco casos possíveis para a posição relativa entre elas: o caso em que uma circunferência é exterior a outra, o caso em que uma circunferência é interior a outra com centros diferentes, o caso em as duas circunferências são concêntricas, o caso em que são tangentes interiormente e o último em que são tangentes exteriormente. A construção é parecida para todos os casos.

Seja  $t$  a reta que contém os centros  $O_1$  e  $O_2$ . Tracemos um diâmetro de qual uma das circunferências, que não esteja contido em  $t$ , por exemplo em  $\mathcal{C}_1$ , e outro diâmetro em  $\mathcal{C}_2$ , que também não esteja contido em  $t$ , paralelo ao primeiro. Ficam determinados assim, os pontos de  $A_1$  e  $B_1$  em  $\mathcal{C}_1$  e  $A_2$  e  $B_2$  em  $\mathcal{C}_2$ .



**Figura 4.16:**  $\mathcal{C}_1$  é exterior a  $\mathcal{C}_2$

O ponto  $V_d$  é dado pela interseção da reta que contém os pontos  $A_1$  e  $A_2$  com a reta que contém os pontos  $B_1$  e  $B_2$ , e o ponto  $V_i$  pela interseção da reta que contém os pontos  $A_1$  e  $B_2$  com a reta que contém os pontos  $A_2$  e  $B_1$ , ambos os pontos pertencem à reta  $t$ . A razão de homotetia direta é  $k = \frac{V_d A_1}{V_d A_2}$ , ou ainda  $k = \frac{V_d A_2}{V_d A_1}$ , a depender da circunferência que se aplicará a homotetia. A primeira razão será  $\mathcal{C}_2$  e na segunda  $\mathcal{C}_1$ . Enquanto a razão  $k$  da homotetia inversa é dada por  $k = -\frac{V_i A_1}{V_i B_2}$  ou por  $k = -\frac{V_i B_2}{V_i A_1}$ .

**Justificativa.** O Teorema Fundamental da Proporcionalidade, Teorema 2.1, confirma que o diâmetro  $\overline{A_2 B_2}$  divide os lados do triângulo  $A_1 V_d B_1$  em uma mesma proporção. Logo se aplicarmos, por exemplo, a homotetia  $H_{V_d, k}$  a  $\mathcal{C}_1$ , com  $k = \frac{V_d A_2}{V_d A_1}$ , tem-se que  $r_2 = O_2 A_2 = k O_1 A_1 = k r_1$ . O mesmo ocorre com  $\mathcal{C}_2$ , ao tomar a outra

razão de homotetia direta. Desta forma,  $V_d$  cumpre as propriedades e a definição da homotetia  $H_{V_d,k}$ , além de estar unicamente determinado.

Para verificar que o mesmo ocorre com  $V_i$ , observamos que pelo caso AAA que os triângulos  $A_1V_iB_1$  e  $A_2V_iB_2$  são semelhantes, uma vez que os ângulos  $\widehat{A_1V_iB_1}$  e  $\widehat{A_2V_iB_2}$  são congruentes, pois são opostos pelo vértice, e os ângulos  $\widehat{V_iB_2A_2}$  e  $\widehat{B_1A_1V_i}$  são alternos internos, portanto congruentes. Assim, os raios herdam a proporção em relação ao outro da semelhança desses triângulos. Então, de forma análoga a  $V_d$ ,  $V_i$  satisfaz as propriedades e a definição, porém da homotetia  $H_{V_i,k}$ .

O caso em que as circunferências são concêntricas, os diâmetros paralelos tomados sempre irão estar sobre uma mesma reta, logo em especial, os pontos  $V_d$  e  $V_i$  coincidem com os centros das circunferências que são comuns.

Abaixo seguem as ilustrações das construções para os demais casos.

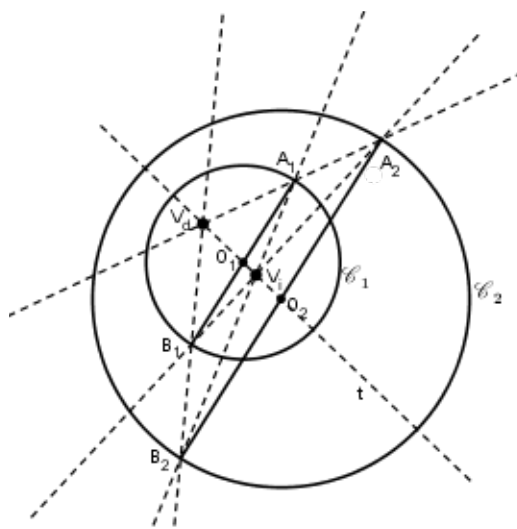


Figura 4.17:  $\mathcal{C}_1$  é interior a  $\mathcal{C}_2$

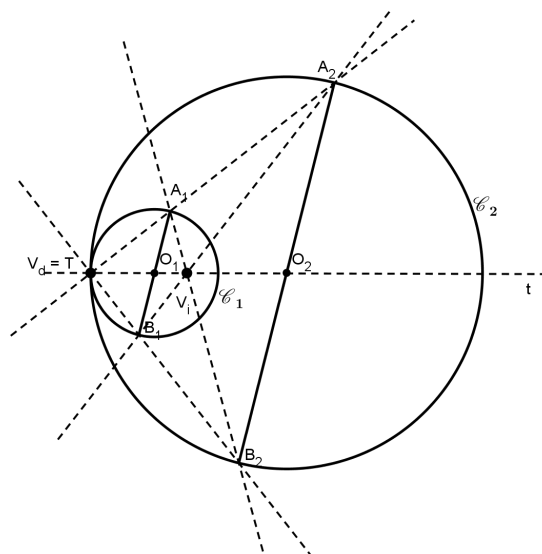


Figura 4.18:  $\mathcal{C}_1$  é tangente interiormente a  $\mathcal{C}_2$

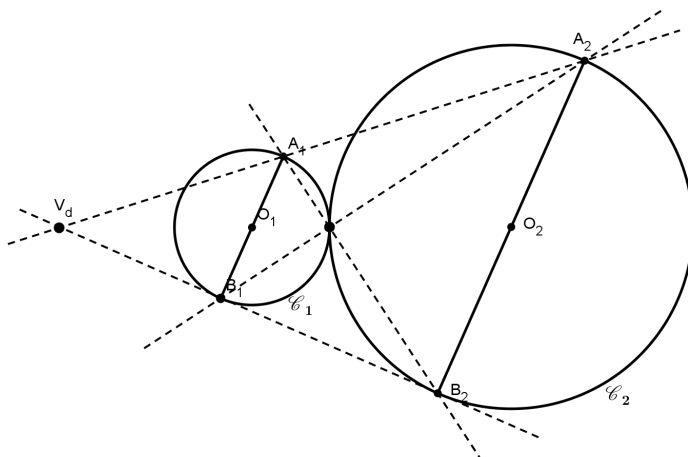


Figura 4.19:  $\mathcal{C}_1$  é tangente exteriormente a  $\mathcal{C}_2$

## O Teorema de Chasles

---

Neste capítulo, trataremos de um dos resultados estudados neste trabalho, a caracterização das isometrias no plano conhecido como Teorema Chasles. Esse capítulo é baseado na referência [3].

### 5.0.1 Caracterização das isometrias

Vários tipos de isometria foram devidamente apresentados na seção 3.3, o Teorema de Chasles irá caracterizá-las, de modo a provar que só existem os tipos de isometrias destacadas anteriormente.

**Teorema 5.1: (Chasles)** Existem apenas quatro tipos de isometria no plano, além da identidade, a saber: a translação, a rotação, a reflexão e a reflexão com deslizamento.

*Demonstração.* Sejam  $T$  uma isometria, diferente da identidade,  $A$  um ponto do plano e  $T(A) = A'$ , em que  $A'$  é diferente de  $A$ . Consideremos ainda que  $T(A') = A''$ . Como  $T$  é uma isometria, temos  $AA' = A'A''$  logicamente maior do que 0. Sobre esses pontos, temos três casos possíveis: no primeiro eles são não colineares, no segundo são colineares distintos e por último em que  $A = A''$ .

No primeiro caso, os pontos  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  formam um triângulo e sua imagem pela isometria é também um triângulo com  $A'$  e  $A''$  como vértices. Por ser uma transformação que preserva distâncias, temos duas opções para o terceiro vértice. Denotemos por  $B_1$  e  $B_2$ , um de cada lado dos semiplanos determinados pela reta que contém o segmento  $\overline{A'A''}$ , as possíveis imagens de  $A$ .

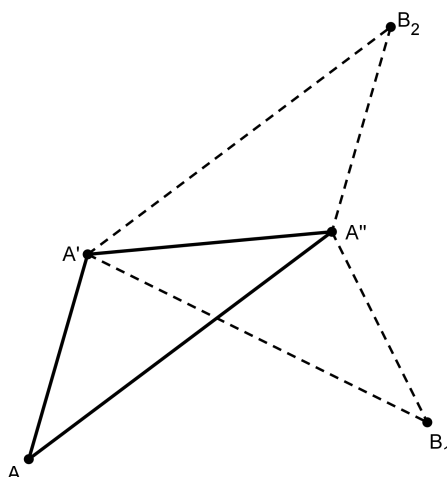


Figura 5.1

Para o caso em que o terceiro vértice está no semiplano que também se encontra  $A$ , o ponto  $T(A'') = B_1$  forma a poligonal convexa  $AA'A''B_1$ , com os lados de mesma medida e os ângulos  $\widehat{AA'A''}$  e  $\widehat{A'A''B_1}$  congruentes, propriedades herdadas da isometria. Desta forma, podemos inscrevê-la em uma circunferência  $\mathcal{C}(O,r)$ , em que  $r = OA$  e  $O$  é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados  $AA'$ ,  $A'A''$  e  $A''B_1$ . Seja  $T(O) = O'$ . Como  $OA = OA' = OA''$ , então temos que  $O'A' = O'A'' = O'B_1$  e, portanto, que o ponto  $O'$  pertence às mediatrizes dos segmentos  $\overline{A'A'}$  e  $\overline{A''B_1}$  e, assim, o ponto  $O$  é fixado pela isometria, ou seja,  $O' = O$ . Logo se considerarmos uma rotação  $\Delta_{O,\theta}$ , no sentido horário, em que  $\theta = m(\widehat{AOA'})$ , obteremos que  $\Delta_{O,\theta}(A) = A' = T(A)$ ,  $\Delta_{O,\theta}(A') = A'' = T(A')$  e  $\Delta_{O,\theta}(A'') = B_1$ . Do fato de a imagem de  $T$  coincidir com a da rotação em três pontos não colineares, segue do Teorema 3.6 que  $T$  é uma rotação.

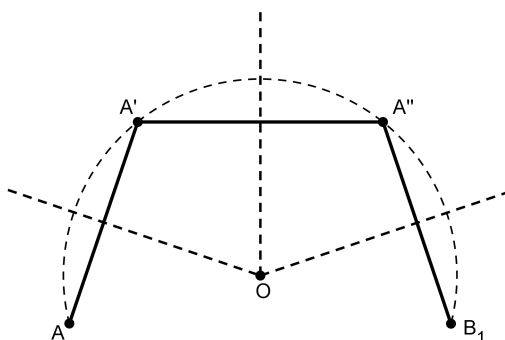


Figura 5.2

Na hipótese de  $T(A'') = B_2$ , isto é, da imagem de  $A''$  estar no semiplano superior ao segmento  $\overline{A'A''}$ , os pontos  $A, A', A''$  e  $B_2$  formam um paralelogramo, pois o quadrilátero possui dois pares de lados congruentes, no qual o segmento  $\overline{AA''}$  é uma das diagonais e  $AA'$  e  $A''B_2$  são lados opostos.

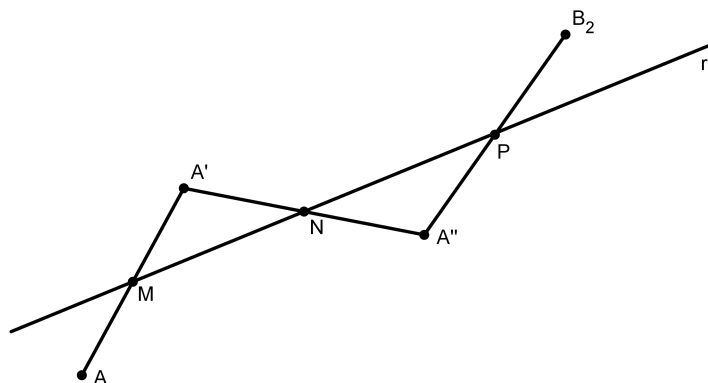


Figura 5.3

Sejam  $M$ ,  $N$  e  $P$  os pontos médios dos segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{A'A''}$  e  $\overline{A''B_2}$ , respectivamente. É fácil ver que esses pontos estão sobre uma mesma reta  $r$ , basta observar os triângulos  $\triangle MAN'$  e  $\triangle N'A''P$ , congruentes pelo caso L.A.L. Pelo teorema do ângulo externo  $m(\widehat{MNA'}) + m(\widehat{A'NP}) = 180^\circ$ . Consideremos uma isometria  $S$  tal que  $S = T_{MN} \circ R_r$ . Ao analisar as imagens dos três pontos por essa isometria, vemos que elas coincidem com a de  $T$ . Logo pelo Teorema 3.6  $T$  é uma reflexão com deslizamento.

No segundo caso, quando eles são colineares e distintos, como  $AA' = A'A''$ ,  $A'$  é ponto médio do segmento  $\overline{AA''}$ . Seja  $r$  a reta que contém esses três pontos, ao aplicarmos a isometria  $T$ , vemos que  $r$  é fixada. Se considerarmos uma translação  $T_{AA'}$  na reta, temos que  $T$  coincide com a translação nos pontos  $A$  e  $A'$ . Segue pelo Teorema 3.4 que  $T$  coincidirá com a translação em todos os pontos da reta. Então, seja  $B$  um ponto fora da reta  $r$ . Como  $ABA'$  forma um triângulo, temos duas possibilidades para  $T(B)$ :  $B_1$  e  $B_2$ , um em cada um dos semiplanos determinadas por  $r$ , visto que dois de seus vértices já estão determinados, são eles  $A'$  e  $A''$ .

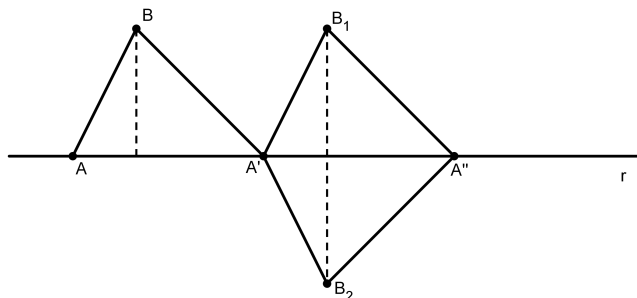


Figura 5.4



No primeiro caso,  $T(B) = B_1$ ,  $AB$  e  $A'B_1$  são lados opostos do paralelogramo  $AA'B_1B$ . Se considerarmos a translação  $T_{AA'}$ , vemos que ela coincide com  $T$  nos três pontos. Logo, pelo Teorema 3.6,  $T$  é uma translação. Já no segundo caso,  $B_2$  coincide com o simétrico do ponto  $B_2$  com relação à reta  $r$ . Ao tomarmos uma isometria  $S = T_{AA'} \circ R_r$ , reflexão com deslizamento, notamos que a imagem dos três pontos coincidem com as de  $T$ . Concluimos, pelo mesmo teorema que  $T$  é uma reflexão com deslizamento.

No último caso, quando  $A = A'$ , a isometria  $T$  transforma o segmento  $\overline{AA'}$  em si mesmo, portanto se  $M$  é o ponto médio desse segmento, então  $T(M) = M$ , pois  $AM = T(A)T(M) = A'T(M)$  e  $A'M = T(A')T(M) = A''T(M) = AT(M)$ .

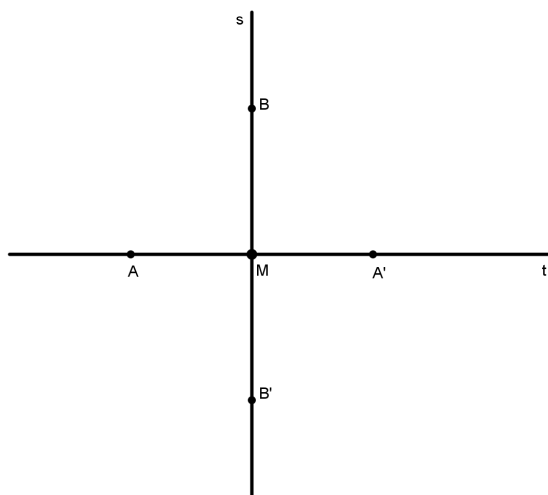


Figura 5.5

Seja  $s$  a mediatriz do segmento  $\overline{AA'}$  e  $B$  um ponto diferente de  $M$ . Existem duas possibilidades para  $T(B)$ : ou  $T(B) = B$  ou  $T(B) = B'$ , o simétrico de  $B$  com relação a reta  $r$ , reta que contém o segmento  $\overline{AA'}$ . Se  $T(B) = B$ , a isometria  $T$  corresponde a reflexão em torno de  $s$ ,  $R_t$  nos pontos  $A$ ,  $A'$  e  $B$ . Por conseguinte,  $T$  é uma reflexão. Para o caso em que  $T(B) = B'$ , se considerarmos a rotação  $\Delta_{M,180}$ , equivalente com a simetria em torno de um ponto, nos pontos  $A$ ,  $A'$  e  $B$  a rotação coincide com  $T$ . Assim,  $T$  é uma rotação. Ademais, concluimos que  $s$  é transformada nela mesma.

## O Teorema de Monge-D'Alembert

---

Neste capítulo, iremos apresentar um resultado atribuído a Monge e D'Alembert, Teorema de Monge- D'Alembert, que caracteriza a composição de homotetias. Trataremos também da resolução de um problema da IMO. Os resultados que trataremos nesse capítulo são baseados na referência [4].

### 6.1 Caracterização da Composição de Homotetias

O resultado que apresentaremos ganhou destaque na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) de 2008 ao ser usado pela primeira vez como ferramenta para resolver um problema. Sem mais delongas, enunciemos o teorema.

**Teorema 6.1: (Teorema de Monge-D'Alembert)** Sejam  $H_1$  e  $H_2$  duas homotetias, cujos pares (centro da homotetia, razão de proporcionalidade) são, respectivamente,  $(V_1, k_1)$  e  $(V_2, k_2)$ . Então:

- (i) Se  $k_1 \cdot k_2 = 1$ , então a composição  $H = H_1 \circ H_2$  é uma translação;
- (ii) Se  $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ , então a composição  $H = H_1 \circ H_2$  é uma homotetia de centro  $V$  e razão  $k_1 k_2$ , e além disso,  $V, V_1, V_2$  são colineares.

*Demonstração.* Para provar o teorema, identificaremos os centros das homotetias  $H_1$  e  $H_2$  com um eixo cartesiano, de modo que  $V_1 = (0,0)$  e  $V_2 = (0,a)$ .

Sejam  $P_0$  um ponto qualquer do plano,  $H_1(P_0) = P_1$  e  $H_2(P_1) = P_2$ . Onde  $H_2(H_1(P_0)) = P_2$  e teremos então  $H = H_2 \circ H_1$ .

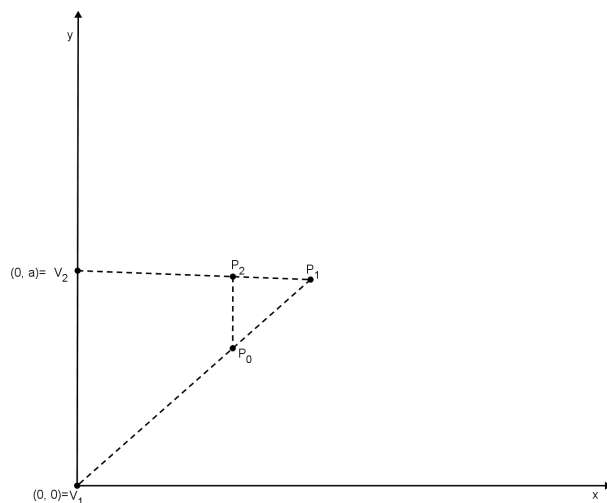


Figura 6.1

No caso  $k_1 \cdot k_2 = 1$ , tem-se que o segmento  $\overline{P_0P_2}$  é paralelo ao segmento  $\overline{V_1V_2}$ . De fato, a definição de homotetia garante que  $\overline{P_0P_2}$  divide os lados do triângulo  $V_1P_1V_2$  na mesma proporção. Logo, pelo Teorema 2.2 segue o resultado.

Como consequência do paralelismo analisado, os triângulos  $V_1P_1V_2$  e  $P_0P_1P_2$  são semelhantes. Deste modo,

$$\frac{P_0P_2}{V_1V_2} = \frac{P_0P_1}{V_1P_1} = \frac{V_1P_1 - V_1P_0}{V_1P_1} = 1 - \frac{1}{k_1} = \frac{k_1 - 1}{k_1}.$$

Então,

$$P_0P_2 = \left( \frac{k_1 - 1}{k_1} \right) \cdot V_1V_2.$$

Como  $V_1V_2$  é fixa, por conseguinte  $P_0P_2$ , também o é. Daí  $P_2$  é uma translação do ponto  $P_0$ .

No caso  $k_1 \cdot k_2$  diferente de 1, iremos encontrar as coordenadas  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  em função de  $V_1V_2 = a$  e de  $P_0 = (x_0, y_0)$ .

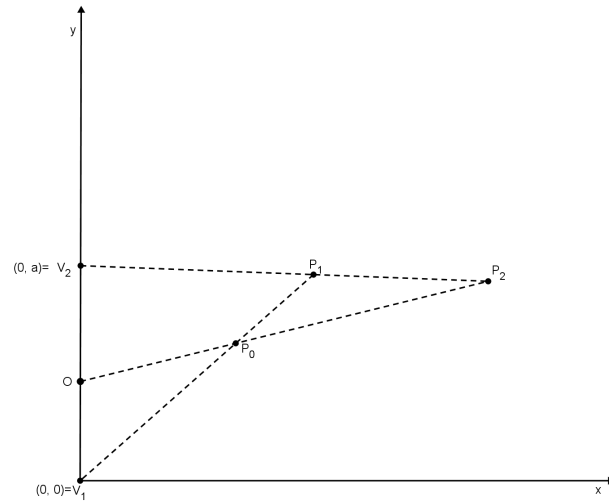


Figura 6.2

Dado que  $P_1 = H_1(P_0)$ , temos:

$$V_1 P_1 = k_1 \cdot V_1 P_0.$$

Logo,

$$(x_1 - 0, y_1 - 0) = (k_1(x_0 - 0), k_1(y_0 - 0)).$$

Então,

$$(x_1, y_1) = (k_1 x_0, k_1 y_0). \quad (1)$$

Dado que  $P_2 = H_2(P_1)$ , temos:

$$V_2 P_2 = k_2 \cdot V_2 P_1.$$

Consequentemente,

$$(x_2 - 0, y_2 - a) = (k_2(x_1 - 0), k_2(y_1 - a)).$$

Então por (1), segue que:

$$(x_2, y_2 - a) = (k_1 k_2 x_0, k_1 k_2 y_0 - a k_2).$$

Assim,

$$(x_2, y_2) = (k_1 k_2 x_0, k_1 k_2 y_0 + a(1 - k_2)). \quad (2)$$

Afirmamos que o ponto  $V$  dado por,

$$V = \left( 0, \frac{a(k_2 - 1)}{k - 1} \right),$$

é tal que  $V P_2 = k \cdot V P_0$ , em que  $k = k_1 \cdot k_2$ . De fato, suponhamos que a priori

$V = (x_V, y_V)$ . Temos que  $H(P_0) = H_2 \circ H_1(P_0)$  e daí  $VP_2 = kVP_0$ , por definição. Fazendo a substituição pelas suas coordenadas tem-se:

$$(x_V - x_2, y_V - y_2) = k(x_V - x_0, y_V - y_0)$$

$$(x_V, y_V) - (x_2, y_2) = k(x_V, y_V) + (-kx_0, -ky_0)$$

$$(1 - k)(x_V, y_V) = (x_2 - kx_0, y_2 - ky_0).$$

Substituindo (2), temos:

$$(1 - k)(x_V, y_V) = (kx_0 - kx_0, ky_0 + a(1 - k_2) - ky_0)$$

Ao multiplicar toda a igual por  $-1$ , obtemos:

$$V = (x_V, y_V) = \left( 0, \frac{a(k_2 - 1)}{k - 1} \right).$$

Como havíamos afirmado. Lembremos que o ponto  $V$  é o centro da homotetia  $H_2 \circ H_1$ . Com efeito, tem-se:

$$VP_2 = \left( x_2 - 0, y_2 - \frac{a(k_2 - 1)}{k_1 k_2 - 1} \right).$$

Então por (2), vem:

$$\begin{aligned} VP_2 &= \left( kx_0, ky_0 + a(1 - k_2) - \frac{a(k_2 - 1)}{k - 1} \right) \\ &= \left( kx_0, ky_0 + k \frac{a(1 - k_2)}{k - 1} \right). \end{aligned}$$

Concluimos que  $VP_2 = k \left( x_0, y_0 + \frac{a(1 - k_2)}{k - 1} \right)$ . Por outro lado,  $VP_0 = \left( x_0 - 0, y_0 - \frac{a(k_2 - 1)}{k - 1} \right)$ , ou seja,  $VP_0 = \left( x_0, y_0 + \frac{a(1 - k_2)}{k - 1} \right)$ . Portanto,  $VP_2 = k \cdot VP_0$ , como queríamos. Ademais, a colinearidade segue do fato de  $V$ ,  $V_1$  e  $V_2$  pertencerem ao eixo  $y$ .

### 6.1.1 Aplicação do Teorema na resolução da questão da IMO

Feita a devida demonstração e apresentação do teorema que caracteriza a composição de homotetias, agora apresentaremos o problema proposto envolvendo a sua aplicação.

**Exemplo 6.1.1:** (IMO-2008) Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo cujos lados  $BA$  e  $BC$  tem comprimentos diferentes. Sejam  $w_1$  e  $w_2$  as circunferências inscritas nos triângulos  $ABC$  e  $ADC$ , respectivamente.

Suponhamos que exista uma circunferência  $w$  tangente à reta  $BA$  de forma que  $A$  está entre  $B$  e o ponto de tangência, tangente à reta  $BC$  de forma que

$C$  está entre  $B$  e o ponto de tangência, e que também seja tangente às retas  $AD$  e  $CD$ . Prove que as tangentes comuns exteriores a  $w_1$  e  $w_2$  se intersectam sobre  $w$ .

Para resolver o problema enunciaremos, a seguir, um resultado sobre colinearidade que envolve incírculos e ex-incírculos .

**Teorema 6.2: (Fenômeno Homotético Circular).** Sejam  $ABC$  um triângulo,  $K$  o ponto de tangência do incírculo, e  $L$  o ponto de tangência do ex-incírculo, relativo a  $A$  em  $BC$ . Então  $A$ ,  $L$  e o ponto  $K'$  diametralmente oposto a  $K$  no incírculo são colineares.

Na figura que segue, para ilustrar tal fato, os segmentos  $\overline{BK}$  e  $\overline{LC}$  têm a mesma medida.

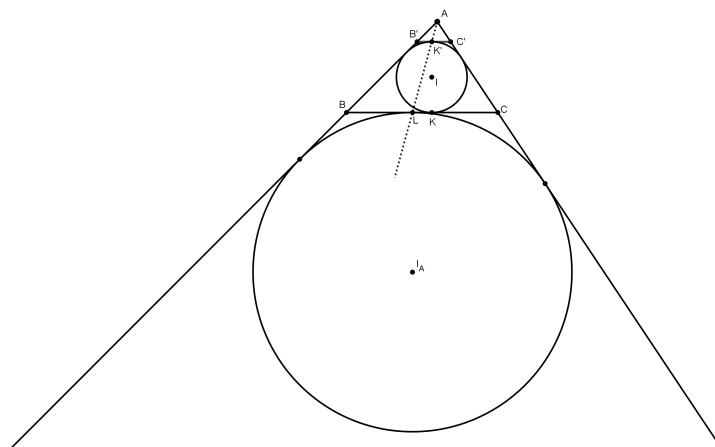


Figura 6.3

A demonstração desse resultado pode ser encontrado na referência [4].

Façamos agora a solução do problema.

**Solução.** Vejamos o esboço do desenho do problema.

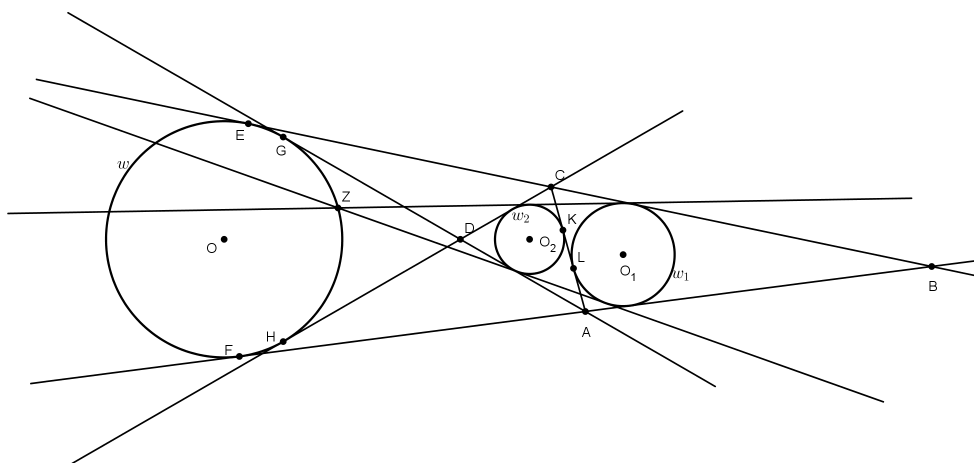


Figura 6.4

Ao analisar as tangências associadas aos círculos  $w_1$  e  $w_2$ , temos pelo Teorema 2.3,  $BE = BF$ ,  $AF = AG$ ,  $CE = CH$  e  $DG = DH$ . Assim,  $AB = BF - AF = BE - AG = BC + CE - (AD + DG) = BC - AD + (CH - DH) = BC - AD + CD$  o que implica que  $AB + AD = BC + CD$ , esse fato se deve a  $w$  ser tangente aos prolongamentos dos lados do quadrilátero  $ABCD$ . Então temos que:

$$\frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{AC + AB - BC}{2}.$$

Mas isso ocorre se, e somente se,  $CK = AL$ . Com efeito, podemos traduzi-lá da seguinte maneira, os ex-incírculos  $w_3$  e  $w_4$  relativos a  $AC$  dos triângulos  $ABC$  e  $ADC$  tangenciam  $AC$  nos pontos  $K$  e  $L$ , respectivamente. Este fato nos induz a querer usar o fenômeno homotético circular. Façamos as circunferências  $w_3$  e  $w_4$ .

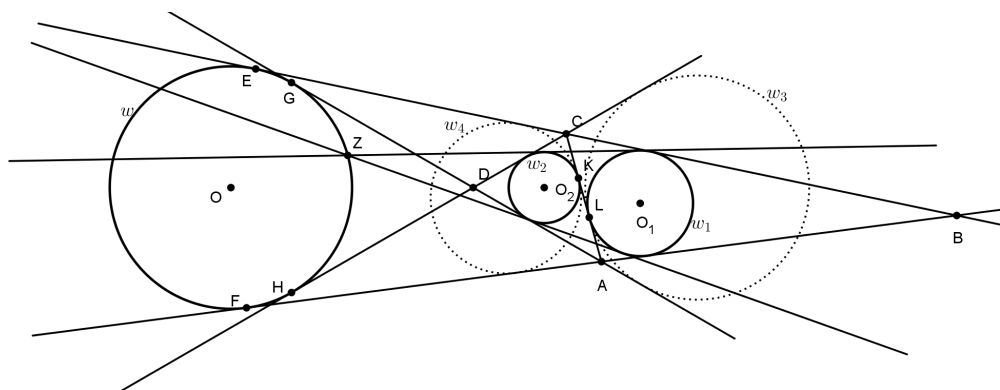


Figura 6.5

A fim de explorar as colinearidades, iremos compor homotetias. Sejam  $H_{24}$ ,  $H_{41}$ ,  $H_{21}$ ,  $H_{23}$  e  $H_{31}$  as homotetias diretas entre  $w_2$  e  $w_4$ ,  $w_4$  e  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ ,  $w_3$  e  $w_1$ , respectivamente.

Façamos as composições  $H_{24} \circ H_{41}$  e  $H_{21}$ . O centro  $K$  da homotetia direta de  $w_2$  e  $w_4$ , o centro  $B$  da homotetia direta de  $w_4$  e  $w_1$  e o centro  $Z$  da homotetia direta de  $w_2$  e  $w_1$  são colineares. Ou seja, o ponto  $Z$  pertence à reta  $BK$ .

Façamos, agora, as composições  $H_{23} \circ H_{41}$  e  $H_{21}$ .  $D$  é o centro da homotetia direta das circunferências  $w_2$  e  $w_3$ , o ponto  $L$  é o centro da homotetia direta das circunferências  $w_3$  e  $w_1$  e o ponto  $Z$  é o centro da homotetia direta das circunferências  $w_2$  e  $w_1$ . Esses centros estarem sobre uma mesma reta, ou seja, o ponto  $Z$  é a interseção da reta que passa por  $B$ ,  $K$  com a reta que passa por  $D$  e  $L$ .

Seja  $W$  a interseção da reta que passa por  $B$  e  $K$  com  $w$ , provaremos que tal ponto coincide com  $Z$ .

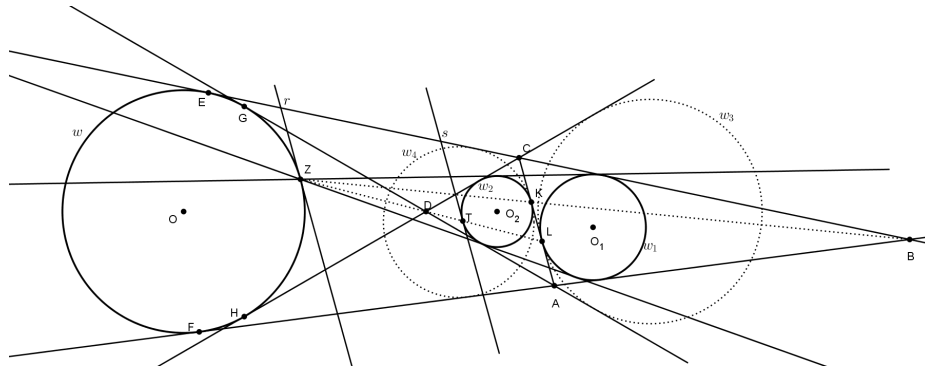


Figura 6.6

Seja, ainda,  $H_4$  a homotetia direta que leva  $w_4$  a  $w$  com centro em  $B$ , assim temos que o ponto  $K$  será levado no ponto  $W$ . Ademais, do fato de  $\overleftrightarrow{AC}$  ser tangente a  $w_4$  em  $K$ , a reta  $r$  paralela a  $\overleftrightarrow{AC}$  que passa por  $W$  é tangente a  $w$ , isto porque  $H_4$  leva a reta  $\overleftrightarrow{AC}$  em  $r$ .

Consideremos, agora, a homotetia inversa  $H_2$ , de centro  $D$ , que leva  $w$  em  $w_2$ .  $H_2$  leva  $W$  em  $T$  e  $r$  em  $s$ , em que  $s$  é a reta paralela a reta  $r$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  e tangente a  $w_2$ . Então, concluímos que os pontos  $D$ ,  $W$  e  $T$  são colineares, ou seja, o ponto  $W$  pertence a reta  $\overleftrightarrow{DT}$ .

Como as retas  $s$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  são paralelas, os pontos  $T$  e  $K$  são diametralmente opostos. Ao aplicar o fenômeno homotético circular temos que  $D$ ,  $T$  e  $L$  são colineares. Do fato de  $W$  pertencer, por definição à reta  $\overleftrightarrow{BK}$ , ela é a interseção das retas  $\overleftrightarrow{BK}$  e  $\overleftrightarrow{DL}$  e, assim coincide com o ponto  $Z$ . O que finaliza a resolução do problema.



# O Teorema de Mohr-Mascheroni

---

Neste capítulo, apresentaremos o último resultado central estudado neste trabalho, o Teorema de Mohr-Mascheroni. Ele nos assegura que toda construção euclidiana obtida com régua não graduada e compasso pode ser obtida apenas com uso do compasso. Para provarmos tal fato nos apoiamos em [1]. Já para a construção do quadrado utilizando apenas o compasso foi necessário resolver alguns problemas e nos baseamos em [2].

## 7.1 Construção da demonstração

O primeiro questionamento que nos deparamos é como, por exemplo, é possível construir com um compasso, apenas, uma reta contínua. De fato, não é possível contruí-la, mas nos lembramos que se determinamos dois pontos quaisquer, temos a garantia que ela estará unicamente determinada. A justificativa se apoia no postulado de incidência, ele diz que dados dois pontos existe apenas uma reta que os contém. Então é suficiente que sejamos capazes de determiná-los apenas com o compasso.

A demonstração que faremos se fundamenta na premissa de que no processo de construções euclidianas, os novos pontos são obtidos através da intersecção de duas circunferências, intersecção de uma reta e uma circunferência e da intersecção de duas retas. Por mais que se torne um processo trabalhoso, por meio de um processo finito envolvendo as operações elementares citadas, é possível obter a construção desejada. Portanto, é satisfatório que mostremos a possibilidade de que essas operações sejam efetuadas apenas com o compasso. Logo, resolveremos os seguintes problemas fazendo uso do compasso:

- (i) Dados os pontos  $A, B, C$  e  $D$ , encontre os pontos de intersecção das circunferências  $\mathcal{C}(A, AB)$  e  $\mathcal{C}(C, CD)$ ;
- (ii) Dados os pontos  $A, B, C$  e  $D$ , encontre os pontos de intersecção da reta que contém os pontos  $A, B$  e da circunferência  $\mathcal{C}(C, CD)$ ;
- (iii) Dados os pontos  $A, B, C$  e  $D$ , encontre o ponto de intersecção da reta que contém os pontos  $A, B$  com a reta que contém os pontos  $C, D$ .

## 7.2 A Demonstração

Diante do citado, iremos enunciar o Teorema de Mohr-Mascheroni e sua prova será consequência direta da prova dos três problemas citados. A priori, será feita a construção, posteriormente a sua justificativa. Após a descrição da construção, terá uma imagem, a fim de mostrar o quão trabalhoso, mas não impossível uma construção usando apenas o compasso pode ser.

**Teorema 7.1: (Teorema de Mohr-Mascheroni)** Qualquer construção euclidiana obtida a partir de régua não graduada e compasso pode ser realizada apenas com compasso.

**Lema 7.1:** Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos distintos do plano tais que as circunferências  $\mathcal{C}(A, AB)$  e  $\mathcal{C}(C, CD)$  se interceptam. Então, a interseção pode ser obtida utilizando apenas o compasso.

*Demonstração.* É imediato do processo de construção. Lembremos que elas podem se interceptar em um ponto, no caso tangente, ou em dois pontos, no caso secante.  $\square$

O caso em que uma reta é tangente a uma circunferência está relacionado com a interseção de duas retas perpendiculares, ou seja, está intimamente ligado com a interseção de duas retas.

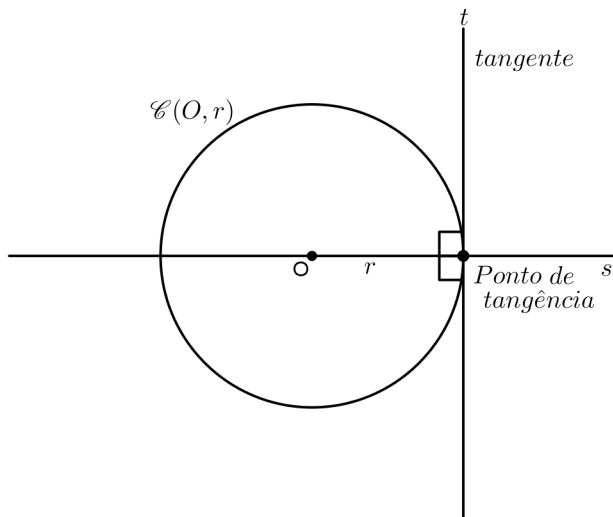


Figura 7.1

**Lema 7.2:** Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos distintos do plano tais que a circunferência de centro  $A$  e raio  $AB$ ,  $\mathcal{C}(A, AB)$  e a reta que passa por  $C, D$  se interceptam nos pontos  $X$  e  $Y$ . Então, os pontos  $X$  e  $Y$  podem ser obtidos utilizando apenas o compasso.

*Demonstração.* Ao analisar a posição relativa entre os pontos, temos dois

casos possíveis:  $C$  não pertence a reta que passa por  $A$  e  $B$  ou  $C$  pertence. Fazemos o primeiro caso.

- (i) *Construção.* Tracemos as circunferências  $\mathcal{C}(A, AC)$  e  $\mathcal{C}(B, BC)$ . Donde obteremos o outro ponto de interseção,  $C_1$ , visto que o outro é o próprio ponto  $C$ . Tracemos, agora, as circunferências  $\mathcal{C}(C, CD)$  e  $\mathcal{C}(C_1, CD)$ . Assim, os pontos em que essas duas circunferências se interceptam são os pontos desejados  $X$  e  $Y$ , pontos que buscamos.

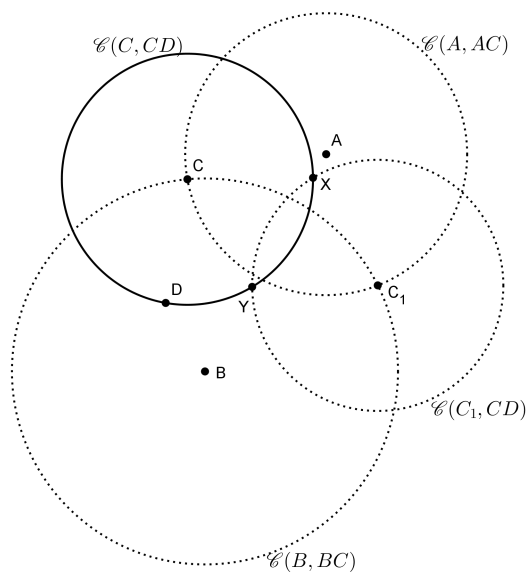


Figura 7.2

- (ii) *Justificativa.* Evidenciaremos alguns segmentos adquiridos na construção para fins demonstrativos, como segue abaixo.

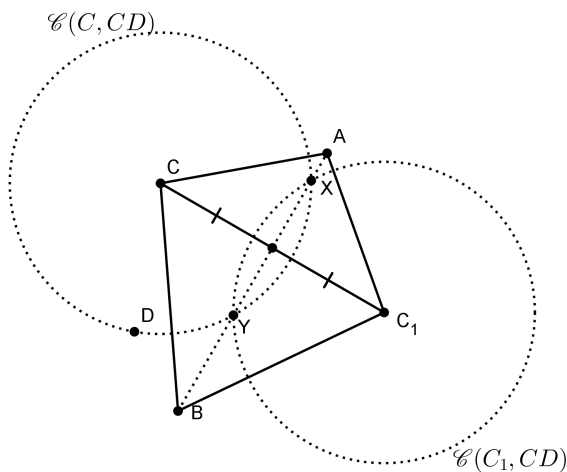


Figura 7.3

O ponto  $C_1$  é o simétrico de  $C$  com relação à reta que passa por  $A$  e  $B$ . Basta notar que os triângulos  $CAC_1$  e  $CBC_1$  são isósceles e a reta  $AB$  é, como lugar geométrico, a mediatriz comum do segmento  $CC_1$ . Ademais, podemos fazer uma correspondência entre os pontos da circunferência  $\mathcal{C}(C, CD)$  com os da  $\mathcal{C}(C_1, CD)$ , de modo que os pontos da primeira tem o seu simétrico com relação a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  em  $\mathcal{C}(C_1, CD)$ . Assim, os únicos pontos fixados são os de interseção, e por propriedade,  $X$  e  $Y$  pertenceram, também, a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  como queríamos. Segundo caso.

- (i) *Construção.* Tracemos as circunferências  $\mathcal{C}(A, AD)$  e  $\mathcal{C}(C, CD)$ . Donde obteremos o outro ponto de interseção,  $D_1$ .

Tracemos as circunferências  $\mathcal{C}(C, DD_1)$  e  $\mathcal{C}(D, DC)$ . A interseção das circunferências,  $F$ , será o quarto vértice do paralelogramo  $CD_1DF$ .

Tracemos as circunferências  $\mathcal{C}(C, DD_1)$  e  $\mathcal{C}(D_1, D_1C)$ . A interseção das circunferências,  $F_1$ , será o quarto vértice do paralelogramo  $CDD_1F_1$ .

Tracemos as circunferências  $\mathcal{C}(F, FD_1)$  e  $\mathcal{C}(F_1, F_1D)$ . Donde determinaremos o ponto  $M$ .

E por último, descrevemos as circunferências  $\mathcal{C}(F, CM)$  e  $\mathcal{C}(C, CD)$ . Daí, as interseções  $X$  e  $Y$  são os pontos que buscamos.

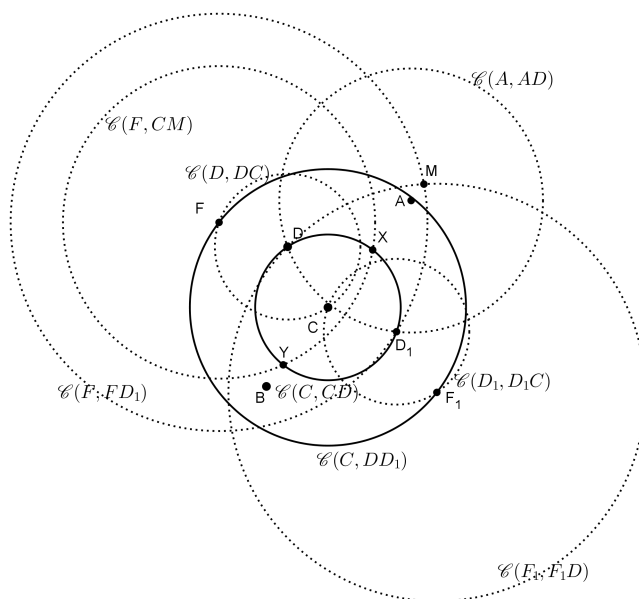


Figura 7.4

- (ii) *Justificativa.* Destacaremos, aqui, alguns elementos que foram adquiridos ao longo do processo de construção para justificar a validade da construção. Para tanto, se faz necessário tracejar alguns segmentos de reta somente para facilitar a análise. No entanto, salientamos que eles não foram obtidos com régua, mas sim com o compasso. Feitas essas ponderações, analisemos a figura a seguir.

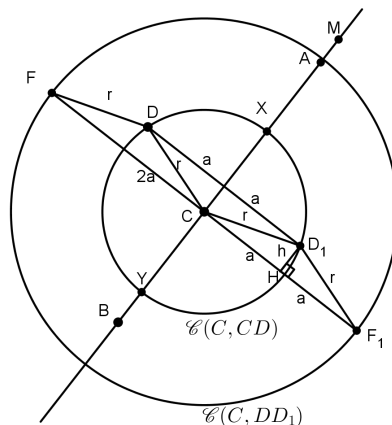


Figura 7.5

Os triângulos  $FDC$ ,  $DCD_1$  e  $CD_1F_1$  são isósceles. Assim, a altura do triângulo  $CD_1F_1$ , por exemplo, dividirá a base em dois segmentos congruentes, de comprimento  $a$ . Além disso, da própria construção, esse três triângulos são congruentes pelo caso L.L.L. O mesmo ocorre com os quadriláteros  $CD_1DF$  e  $CDD_1F_1$ , além de serem paralelogramos, visto que possuem dois pares de lados congruentes.

Do triângulo retângulo  $FCM$ , tem-se:

$$(CM)^2 = (FM)^2 - (2a)^2 = (FM)^2 - 4a^2.$$

Por outro lado, como os paralelogramos  $CD_1DF$  e  $CDD_1F_1$  são congruentes, temos  $FD_1 = F_1D$ . Por construção, segue que  $FM = FD_1$ . Então,

$$(CM)^2 = (FM)^2 - 4a^2 = (FD_1)^2 - 4a^2.$$

Ao analisar o triângulo retângulo  $FD_1H$ , concluímos que  $(FD_1)^2 = (3a)^2 + h^2 = 9a^2 + h^2$ . Além de  $h^2 = r^2 - a^2$ . Portanto,

$$(CM)^2 = (9a^2 + h^2) - 4a^2 = 9a^2 + r^2 - a^2 - 4a^2.$$

Como  $CX = r$  podemos concluir que

$$(CM)^2 = 4a^2 + r^2 = (FM)^2.$$

□

**Lema 7.3:** Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos distintos do plano tais que a reta que passa por  $A, B$  e reta que passa por  $C, D$  se interceptam no ponto  $X$ . Então, o ponto  $X$  pode ser obtido utilizando apenas o compasso.

*Demonstração.* (i) *Construção.* Tracemos as circunferências  $\mathcal{C}(A, AC)$  e  $\mathcal{C}(B, BC)$ . Obteremos o outro ponto de interseção,  $C_1$ .  
 Tracemos as circunferências  $\mathcal{C}(A, AD)$  e  $\mathcal{C}(B, BD)$ . Daí obteremos a outra interseção das circunferências,  $D_1$ .  
 Construamos as circunferências  $\mathcal{C}(C, DD_1)$  e  $\mathcal{C}(D_1, CD)$ . A outra interseção das circunferências,  $G$ , será o ponto que é colinear com os pontos  $C$  e  $C_1$ .  
 Delineemos as circunferências  $\mathcal{C}(C_1, C_1G)$  e  $\mathcal{C}(G, GD_1)$ . Donde determinaremos o ponto  $E$ , que é qualquer um dos pontos de interseção.  
 Concebamos as circunferências  $\mathcal{C}(C_1, C_1C)$  e  $\mathcal{C}(G, CE)$ . A interseção que tomaremos,  $F$ , é a que é colinear com os pontos  $C_1$  e  $E$ .  
 Por fim, tracemos as circunferências  $\mathcal{C}(C, CF)$  e  $\mathcal{C}(C_1, CF)$ . Assim obtemos a interseção, o ponto  $X$ , que conclui a construção. Para encontrar esse ponto, pode-se criar um sistema de coordenadas conveniente e utilizar a geometria analítica para determiná-lo.

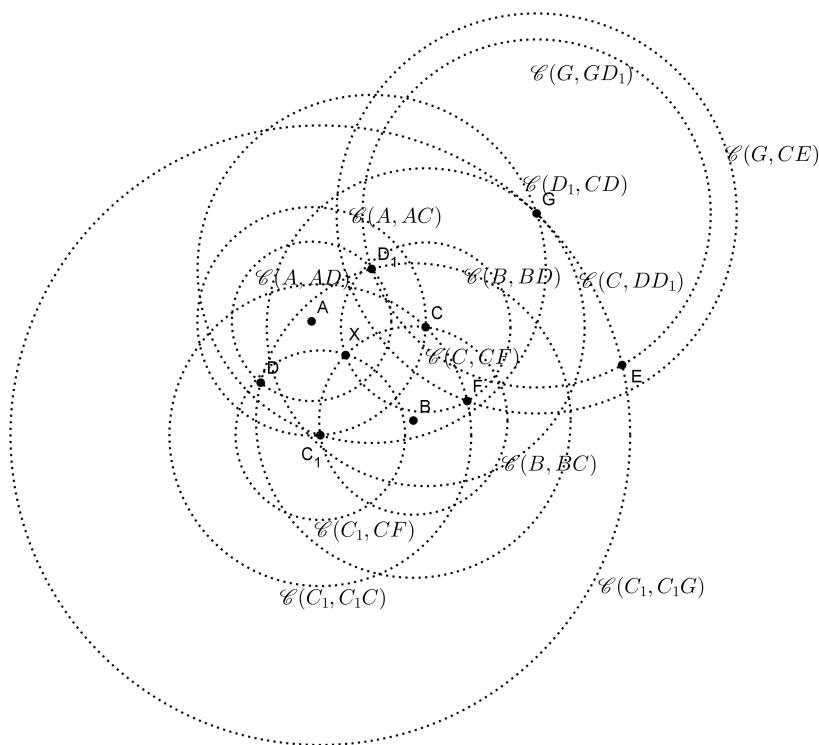


Figura 7.6

(ii) *Justificativa.* Para provarmos que o ponto  $X$  obtido pertence a ambas as retas, de modo análogo ao lema anterior, iremos destacar alguns segmentos.

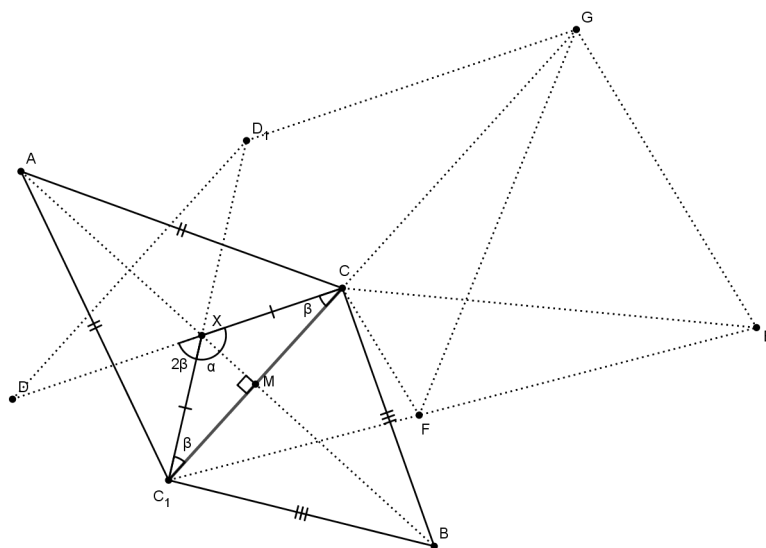


Figura 7.7

Por construção, os segmentos  $\overline{CX}$  e  $\overline{C_1X}$  têm o mesmo comprimento  $CF$ . Daí o triângulo  $CXC_1$  é isósceles, e por conseguinte,  $m(\widehat{XCC_1}) = m(\widehat{XC_1C}) = \beta$ . Como o ângulo  $\widehat{C_1XD}$  é externo ao triângulo analisado, isto é,  $m(\widehat{C_1XD}) = 2\beta$ . Concluimos que  $X$  pertence a reta que passa por  $C$  e  $D$ .

Notemos, ainda, que  $A$  pertence a mediatriz do segmento  $\overline{CC_1}$ , pois equidista, por construção, dos pontos  $C$  e  $C_1$ . Por outro lado,  $B$  também pertence a mediatriz do segmento  $\overline{CC_1}$ , uma vez que equidista dos dois pontos. Logo, os pontos  $A$  e  $B$  determinam a mediatriz do segmento  $\overline{CC_1}$ , e por conseguinte, como  $CX = C_1X$ ,  $X$  é um ponto da mediatriz. E concluimos, assim, que  $A$ ,  $B$  e  $X$  são colineares.  $\square$

A prova que apresentamos, além de mostrar a existência da construção, também diz como encontrá-la com os elementos euclidianos de que dispomos. Com esse argumento, ela se torna muito mais do que uma mera prova de existência. Ressaltamos que o leitor que se aventurar no processo construtivo utilizando apenas o compasso precisará ter certa engenhosidade. Para isso, poderá recorrer a geometria analítica e a construção de um sistema de coordenadas afim de justificar as construções aqui feitas, cujos detalhes foram omitidos.

### 7.3 A construção de um quadrado de lado $l$

Construiremos o quadrado de duas maneiras, na primeira iremos utilizar régua e compasso e na segunda apenas o compasso, a fim de que possamos constatar como o processo de utilizar apenas o compasso, para construção,

pode se tornar complexo, mesmo em construções geométricas básicas.

A priori apresentaremos o passo a passo para construí-lo e, apenas no primeiro caso, iremos justificar tal construção, pois o argumento é o mesmo para a construção apenas com o compasso.

**Problema 1.** Dado um segmento  $\overline{AB}$  de medida  $l$ . Construa um quadrado de lado  $l$  e que esteja contido no semiplano superior determinado pela reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

### 7.3.1 Com régua e compasso

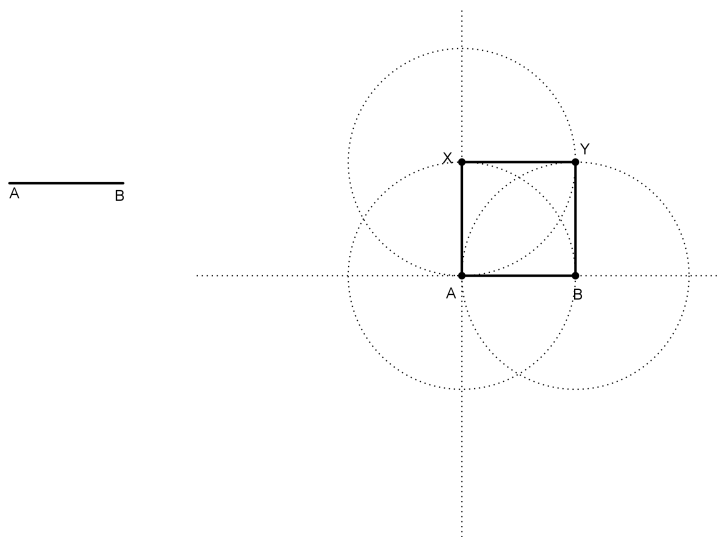
- (i) *Construção.* Primeiro construímos uma reta suporte e sobre ela transportamos o segmento  $AB$ .

Feito isso, determinamos uma reta perpendicular ao segmento  $AB$  que passa pelo ponto  $A$ . As construções intermediárias, como por exemplo da mediatriz, podem ser encontrada com detalhes na referência [5].

Agora, basta que transportemos sobre ela um segmento de medida  $l$  e encontraremos o ponto  $X$ , terceiro vértice do quadrado.

Para determinar o último vértice,  $Y$  do quadrado tomamos a interseção das circunferências  $\mathcal{C}(X, l)$  e  $\mathcal{C}(B, l)$ , que se encontra no mesmo semiplano, definido por  $AB$ , de  $X$ .

O quadritátero  $ABYX$  é o quadrado procurado.



- (ii) *Justificativa.* Por construção temos  $AB = BY = AX = XY$ , logo é suficiente que provemos que os ângulos compreendidos nesses vértices sejam retos.

De fato, como  $X$  pertence a reta perpendicular ao segmento  $AB$  tem-se  $m(\widehat{XAB}) = 90^\circ$ . Por conseguinte,  $XAB$  é um triângulo retângulo isósceles o que nos garante  $m(\widehat{AXB}) = m(\widehat{XBA}) = 45^\circ$ .

Pelo caso de congruência L.L.L os triângulos  $XAB$  e  $BYX$  são congruentes, o que conclui a prova.



### 7.3.2 Apenas com o compasso

Para fazer essa construção, precisaremos resolver alguns problemas que usarão apenas o compasso, a fim que seja mais fácil construir o quadrado. Destacaremos alguns segmentos para fins demonstrativos.

**Problema 2.** Dividir um arco  $AB$  de circunferência  $\mathcal{C}(O, r)$  pela metade.

- (i) *Construção.* Primeiro obtemos os pontos  $C$  e  $D$  que são interseções das circunferências  $\mathcal{C}(O, AB)$  e  $\mathcal{C}(A, r)$  e das circunferências  $\mathcal{C}(O, AB)$  e  $\mathcal{C}(B, r)$ .

Traçamos, agora, as circunferências  $\mathcal{C}(C, CB)$  e  $\mathcal{C}(D, AD)$  e tomaremos a interseção,  $E$ , do mesmo lado do semiplano, determinado por  $\overleftrightarrow{CD}$ , que se encontram os pontos  $A$  e  $B$ .

Por último, encontramos as interseções de  $\mathcal{C}(C, OE)$  e  $\mathcal{C}(D, OE)$ , os pontos  $X$  e  $Y$ . O ponto  $X$  divide o arco  $AB$  ao meio e o ponto  $Y$  divide ao meio o arco que completa a circunferência.

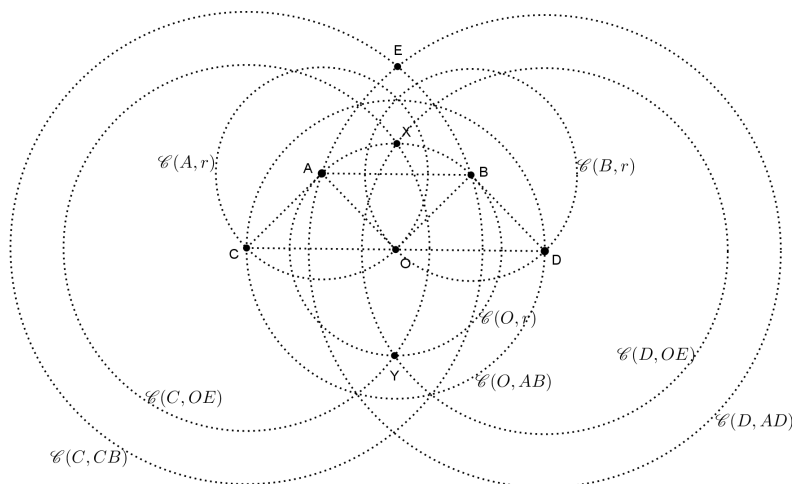


Figura 7.8

- (ii) *Justificativa.* Os quadriláteros  $ABOC$  e  $ABDO$  são paralelogramos, assim  $C, D$  e  $O$  são colineares e pertencem aos triângulos isósceles  $CED$  e  $CXD$ . Além disso, como  $OC = OD$  os segmentos  $\overline{OX}$  e  $\overline{OE}$  estão contidos nas medianas dos respectivos triângulos, portanto coincide com a altura, donde  $m(\widehat{COE}) = m(\widehat{COX}) = 90^\circ$ . Conseqüentemente, o segmento  $\overline{OX}$  é perpendicular a corda  $AB$ .

Desse modo, para mostrarmos que o ponto  $X$  divide o arco  $AB$  ao meio, é suficiente mostrarmos que  $OX = r$ .

Ao analisar o paralelogramo  $ABOC$ , aplicarmos a lei dos cossenos aos triângulos  $CAB$  e  $ABO$ , usarmos que os ângulos  $\widehat{CAB}$  e  $\widehat{ABO}$  são suplementares e que, por construção,  $AC = OB$  temos,

$$BC^2 + OA^2 = 2OB^2 + 2AB^2. \quad (1)$$

Com efeito, ao aplicar a lei dos cossenos aos triângulos  $CAB$  e  $ABO$  e usando o fato que  $\widehat{CAB}$  e  $\widehat{ABO}$  são suplementares teremos, respectivamente, as equações (2) e (3):

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha \quad (2)$$

$$AO^2 = AB^2 + OB^2 - 2 \cdot AB \cdot OB \cdot \cos(180 - \alpha) \quad (3).$$

Usando que  $AC = OB$  e a relação de cosseno da diferença, obtemos:

$$BC^2 = OB^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot OB \cdot \cos\alpha \quad (4)$$

$$AO^2 = AB^2 + OB^2 + 2 \cdot AB \cdot OB \cdot \cos(\alpha) \quad (5).$$

Assim, se isolarmos o termo  $2 \cdot AB \cdot OB \cdot \cos(\alpha)$  da equação (5) e substituirmos em (4) teremos

$$BC^2 + OA^2 = 2OB^2 + 2AB^2,$$

como queríamos. Mas  $OA = OB = r$ , logo (1) é igual a:

$$BC^2 + r^2 = 2r^2 + 2AB^2,$$

ou seja,

$$BC^2 = 2AB^2 + r^2 \quad (2).$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitagóras ao triângulo  $COE$ , obtemos:

$$CE^2 = BC^2 = OC^2 + OE^2.$$

Usando (2) e que  $OC^2 = AB^2$ , segue que

$$OE^2 = AB^2 + r^2.$$

Por último, aplicando o Teorema de Pitagóras ao triângulo  $COX$  e lembrando que  $CX = OE$ , por construção, obteremos:

$$OX = \sqrt{CX^2 - OC^2} = \sqrt{OE^2 - OC^2} = \sqrt{AB^2 + r^2 - AB^2} = r.$$

**Problema 3.** Obter os pontos de interseção da circunferência dada  $\mathcal{C}(O, r)$  com a reta dada por dois pontos  $A$  e  $B$ , no caso em que  $O$  pertence a  $\overleftrightarrow{AB}$ .

- (i) *Construção.* Primeiro traçamos um circunferência de raio arbitrário  $d$  e centrada em  $A$ ,  $\mathcal{C}(A, d)$ , que intersecta a circunferência  $\mathcal{C}(O, r)$  em dois pontos,  $C$  e  $D$ . Por último, basta dividir o arco  $CD$  da circunferência  $\mathcal{C}(O, r)$  pela metade, como no Problema 2. Os pontos que serão encontrados são as interseções desejadas. Na figura que segue as interseções são os pontos  $X$  e  $Y$ .

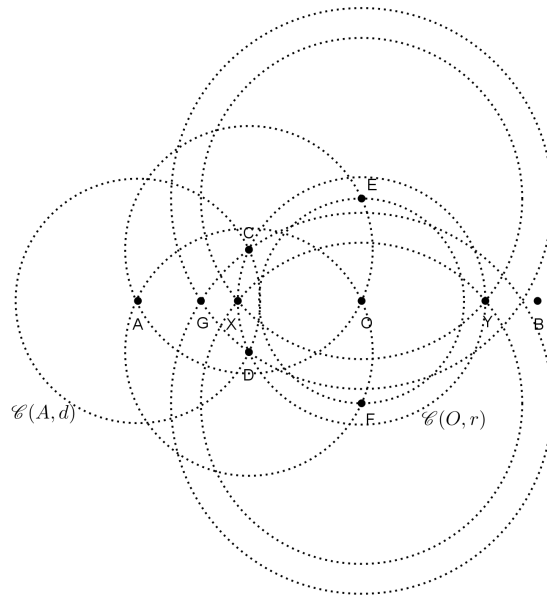


Figura 7.9

- (ii) *Justificativa.* O argumento para justificar que os pontos  $X$  e  $Y$  pertencem a circunferência  $\mathcal{C}(O, r)$  é o mesmo apresentado no Problema 2, além disso, como  $OX = OY = r$  o segmento  $\overline{XY}$  é diâmetro e, por conseguinte,  $X, Y$  e  $O$  são colineares. Assim basta que provemos que os mesmos são também pontos de  $\overleftrightarrow{AB}$ .  
A figura abaixo destaca as circunferências do processo de construção do problema.

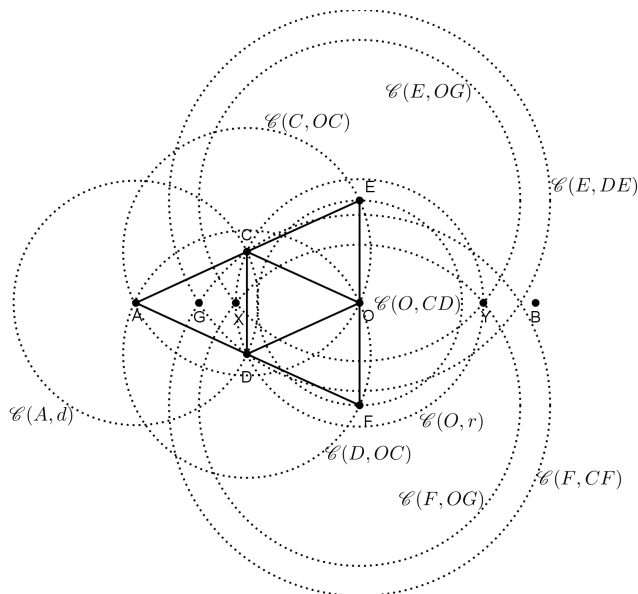


Figura 7.10

Os quadriláteros  $ODCE$  e  $OCDF$  são paralelogramos, pois possuem dois pares de lados congruentes. Os triângulos  $FXE$  e  $FYE$  são isósceles e congruentes, além de  $OE = OF$ . Assim, os pontos  $X$  e  $Y$  pertencem a mediatriz do segmento  $EF$ . Como  $CE = DF$  e  $AC = AD$  o triângulo  $FAE$  é isósceles, logo,  $AO$  também pertence a mediatriz de  $EF$ , pois  $OE = OF$ . Desse modo, os pontos  $A, X, Y$  e  $O$  são colineares, o que conclui a prova.

**Problema 4.** Determinar a reta perpendicular ao segmento  $AB$  no ponto  $A$ .

- (i) *Construção.* Fixemos uma abertura de tamanho arbitrário  $r$ , daí traçamos as circunferências  $\mathcal{C}(A, r)$  e  $\mathcal{C}(B, r)$  e obtemos o ponto  $O$ . O ponto  $E$  que determina a reta perpendicular procurada é diametralmente oposto ao ponto  $B$ . Para tanto tomamos a interseção,  $C$ , das circunferências  $\mathcal{C}(O, r)$  e  $\mathcal{C}(B, r)$  que está no mesmo semiplano, determinado por  $\overrightarrow{AB}$ , de  $O$ . Então, descrevemos uma circunferência  $\mathcal{C}(C, r)$  e obteremos o ponto  $D$ , interseção dessa circunferência com  $\mathcal{C}(O, r)$ . Finalmente o ponto  $E$  é obtido pela interseção de  $\mathcal{C}(D, r)$  e  $\mathcal{C}(O, r)$ . Ademais, o caso em que  $AB = r$  nos dará a solução.

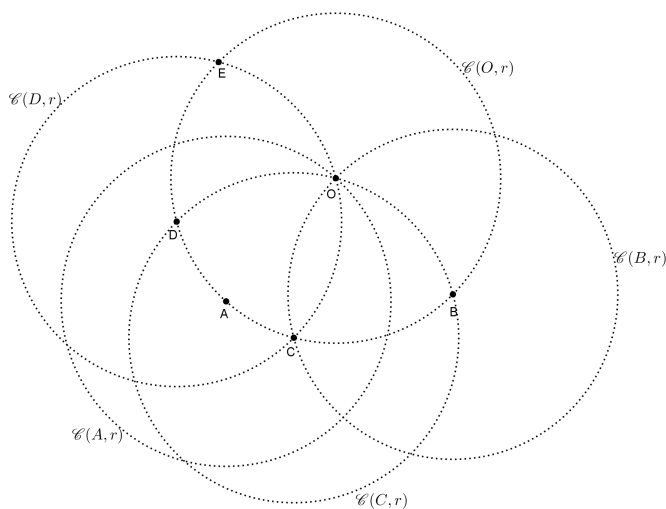


Figura 7.11

(ii) *Justificativa.* Observemos os quadriláteros destacados  $CDEO$  e  $BCDO$ .

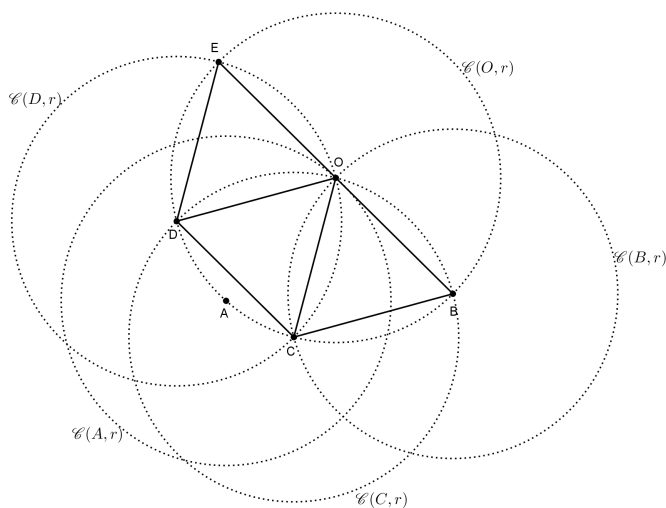


Figura 7.12

Por construção, tem que  $DE = CD = BC = OB = OE = OD$ . Logo,  $CDEO$  e  $BCDO$  são paralelogramos e com isso ganhamos que os pontos  $B$ ,  $E$  e  $O$  são colineares. Como  $OE = OB$  o segmento  $\overline{BE}$  é diâmetro de  $\mathcal{C}(O, r)$ , ou seja,  $m(\widehat{EAB}) = 90^\circ$ . Desse modo,  $\overleftrightarrow{AE}$  é perpendicular a  $\overleftrightarrow{AB}$ .

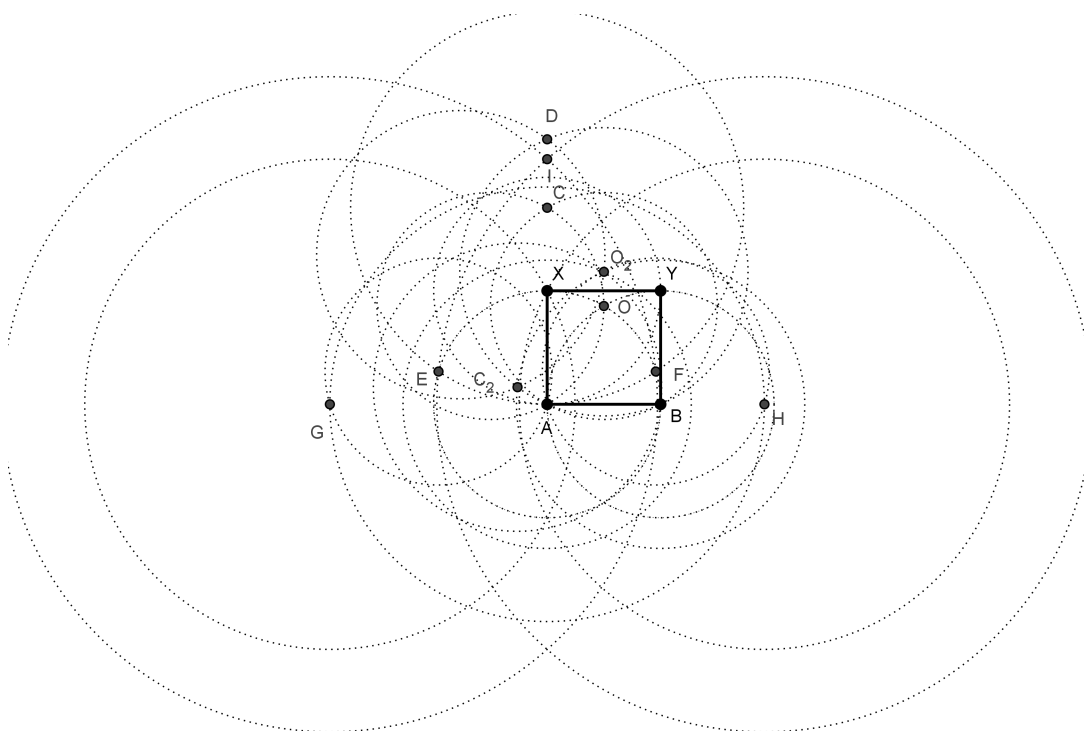
Dispostos desses problemas e de suas soluções, podemos descrever o processo construtivo utilizando apenas o compasso.

*Construção.* Seguiremos o mesmo roteiro do processo com régua e compasso, mas esses passos podem ser um tanto quanto complicados somente com o compasso. Primeiramente fixamos a abertura  $AB$  e determinamos os pontos  $A$  e  $B$ . Sobre o ponto  $A$  construímos a reta perpendicular. Faremos esse processo

duas vezes, usando o Problema 4, utilizando um raio arbitrário  $r$  no primeiro caso e o raio  $l$  no segundo, e obteremos os pontos  $D$  e  $C$ , respectivamente.

Como dispomos apenas de compasso para transportar o segmento de medida  $l$  para a reta perpendicular obtida, temos que obter a interseção da circunferência  $\mathcal{C}(A, l)$  com a reta determinada por  $C$  e  $D$ . Observemos que o centro da circunferência pertence a reta  $CD$ . Para essa etapa repetimos o processo do Problema 3 e encontramos o ponto  $X$ .

Finalmente determinamos ponto  $Y$ , quarto vértice, como a interseção das circunferências  $\mathcal{C}(X, l)$  e  $\mathcal{C}(B, l)$  que está no mesmo semiplano, determinado pela reta que passa por  $A$  e  $B$ .



Ao comparar os dois processos, vemos o quão pode se tornar trabalhoso usar apenas o compasso, pois ele depende de outras construções mais “simples”. Construir um quadrado utilizando a régua e compasso é bem elementar. No entanto, o uso, único, do compasso para construí-lo é complexo. Ao comparar, por exemplo, o número de circunferências utilizadas no processo de construção pode-se ver esse fato. Utilizando apenas o compasso foi necessário traçar 18 circunferências, já com régua e compasso apenas 3.

# Bibliografia

---

- [1] Eves, Howard Whitley. *A survey of geometry*. Allyn and Bacon, 1972.
- [2] Freiburger, Marcondes. *Construções geométricas com régua e compasso*. Florianópolis, SC. 2004.
- [3] Lima, Elon Lages. *Isometrias*.-2<sup>a</sup> ed.- Rio de Janeiro: SBM, 1996.
- [4] Moreira, Carlos Gustavo Tamm de Araújo. *Eureka*. Olimpíada Brasileira de Matemática. -29<sup>a</sup> ed.- Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 2009.
- [5] Rezende, Eliane Quelho Frota. Queiroz, Maria Lúcia Bontorim. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*.-2<sup>a</sup> ed.- Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008.