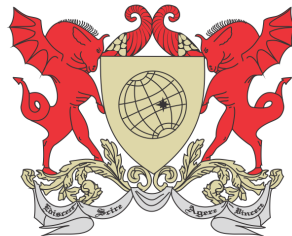


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO



LEANDRO HENRIQUE SILVA GOLZ

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES COMPACTAS

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2020

LEANDRO HENRIQUE SILVA GOLZ

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES COMPACTAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Copie o arquivo

`ficha_catalografica_ufv.pdf`

fornecido pela UFV para a pasta do trabalho e a ficha catalográfica será automaticamente incluída aqui.

LEANDRO HENRIQUE SILVA GOLZ

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES COMPACTAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

APROVADA: 18 de dezembro de 2020.

Sérgio Henrique Nogueira

Luiz Gustavo Perona Araújo

Alexandre Alvarenga Rocha
(Orientador)

Agradecimentos

Eu agradeço à Deus. Agradeço aos meus pais e minha irmã, pelo apoio emocional e material. Agradeço aos servidores da Universidade Federal de Viçosa, campus Florestal, em particular aos professores, em nome de meu orientador Alexandre, pela participação construtiva nessa etapa de formação. Agradeço aos que comigo conviveram algum momento, em especial os que conviveram mais, durante os meus quatro anos de estadia em Florestal.

Resumo

GOLZ, Leandro Henrique Silva, Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2020. **Classificação de Superfícies Compactas**. Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

O objetivo deste trabalho é o estudo de um assunto introdutório clássico da Topologia Algébrica: as Superfícies Compactas. Os requisitos para abordar tal tema são conhecimentos básicos de Topologia Geral e Álgebra.

O projeto se divide em quatro capítulos intitulados Introdução, Espaços Topológicos, Variedades Bidimensionais e Conclusões. O Capítulo 1 se ocupa basicamente de pontuações históricas e motivações ao estudo do que se segue. No Capítulo 2 são abordados temas básicos de um curso de Topologia Geral, contendo mais resultados do que o necessário para o desenvolvimento do Capítulo 3, mas que estão intimamente associados a este. Merecem destaque as Subseções 2.2.4 e 2.2.6 e a Seção 2.3. Os tópicos de Espaço Quociente, Espaço de Hausdorff e Compacidade são ali cobertos com um bom grau de detalhes para um estudo das Superfícies. Vários resultados são demonstrados no Capítulo 2, os omitidos podem ser encontrados em [1] ou [2]. No Capítulo 3, define-se variedade n -dimensional. As variedades bidimensionais é o objeto de interesse central. Define-se uma maneira de somar superfícies a partir da qual qualquer superfície compacta é obtida de três superfícies fundamentais, segundo o Teorema de Classificação. A noção de triangulação, essencial na prova do Teorema de Classificação, nos leva a um expressivo teorema, que caracteriza as superfícies em termos da orientação e da característica de Euler.

Considerações finais acerca do trabalho são feitas no Capítulo 4.

Abstract

GOLZ, Leandro Henrique Silva, Universidade Federal de Viçosa, December, 2020.
Classification of Compact Surfaces. Adviser: Alexandre Alvarenga Rocha.

The goal of this work is the study of a classical introductory subject in Algebraic Topology: the Compact Surfaces. The requirements to tackle this theme are basic knowledge about General Topology and Algebra.

The project breaks down into four chapters titled Introduction, Topological Spaces, Two-dimensional Manifolds and Conclusions. The Chapter 1 deals basically with historical considerations and motivations of the following content. Chapter 2 treats some notions covered by any General Topology course. Although there are more details than required for Chapter 3, they are closely linked to that one. The Subsections 2.2.4 and 2.2.6, and the Section 2.3, deserve emphasis. The contents about Quotient Space, Hausdorff Space and Compactness are well enough discussed in order to study surfaces. Several results were proofed, and the ones that were left out, may be consulted in [1] or [2]. In Chapter 3 are defined n-dimensional manifolds. The 2-dimensional manifold are the main object of interest. A nice way to add surfaces is presented so that any compact 2-dimensional manifold can be obtained from three fundamental surfaces, according to the Classification Theorem. The notion of triangulation, essential in the proof of Classification Theorem, takes us to an outstanding theorem, which characterizes the surfaces in terms of orientation and the Euler characteristic.

Final considerations around the work are made in Chapter 4.

Sumário

1	Introdução	1
2	Espaços Topológicos	2
2.1	Espaços Métricos	2
2.1.1	Funções Contínuas	4
2.1.2	Conjuntos Abertos num Espaço Métrico.	4
2.1.3	Homeomorfismos	6
2.2	Espaços Topológicos	8
2.2.1	Topologia Induzida	9
2.2.2	Interior, Fronteira e Vizinhança	10
2.2.3	Conjuntos Fechados	10
2.2.4	Topologia Quociente	12
2.2.5	Base e Topologia produto	17
2.2.6	Espaços de Hausdorff	18
2.3	Compacidade	19
2.4	Espaços conexos	23
3	Variedades Bidimensionais	26
3.1	Definição e exemplos de variedades n-dimensionais	26
3.2	Orientação de Superfícies	27
3.3	Somas Conexas	28
3.4	O Teorema de Classificação das Superfícies Compactas	30
3.4.1	Triangulação de Superfícies Compactas	33
3.4.2	Demonstração do Teorema de Classificação das Superfícies Compactas	36
3.5	Característica de Euler	44
4	Conclusões	49

Introdução

A Topologia é uma área da Matemática relativamente recente, sendo os trabalhos de Leonard Euler, com a resolução do problema das sete pontes de Königsberg, em 1736, um dos principais marcos de seu surgimento. Nos últimos três séculos a Topologia vem crescendo grandiosamente, com subáreas e várias aplicações a outros campos da Matemática, como Teoria de Grafos, Sistemas Dinâmicos e Geometria.

Este trabalho visa, por um lado, proporcionar ao leitor um contato com a Topologia, apresentando tópicos elementares de Topologia Geral, alguns métodos usuais desta teoria e resultados básicos. Nesta parte os exemplos são, muitas vezes, direcionados a conteúdos subsequentes. Por outro lado, compondo a parte central do trabalho e servindo como uma introdução à Topologia Algébrica, é feito um estudo das Superfícies Compactas, em vista de sua classificação.

Este tipo de espaço topológico é um caso particular de variedade n -dimensional. Além de serem visualmente mais tratáveis as variedades bidimensionais ou superfícies admitem um teorema de classificação de grande elegância. Hoje sabe-se que variedades de dimensão igual ou maior do que quatro não admitem uma classificação semelhante. A classificação das variedades tridimensionais recai na famosa Conjectura de Poincaré, que em 2003 foi demonstrada pelo matemático russo Grigori Perelman, ao provar a Conjectura de Geometrização de Thurston.

Mostraremos as principais técnicas e ideias presentes na demonstração do Teorema de Classificação de Superfícies Compactas, as quais estão na base dos conceitos mais modernos da Topologia. Essa classificação se torna completa com a introdução da característica de Euler, um invariante topológico numérico que, juntamente com a orientação, caracteriza as superfícies compactas.

Espaços Topológicos

A fim de alcançar os objetivos principais de estudo deste trabalho, faz-se necessário preparar o campo com algumas ideias básicas. Neste capítulo, apresentamos conceitos elementares de Topologia Geral que aparecerão frequentemente ao longo do texto.

2.1 Espaços Métricos

Definição 2.1: Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$ chamado distância do ponto x ao ponto y , tal que:

1. $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in M$.

Um conjunto M com uma métrica d é chamado espaço métrico e é denotado por (M, d) ou simplesmente M .

Exemplo 2.1.1: Todo conjunto M admite uma estrutura de espaço métrico. Basta tomar em M a métrica segundo a qual $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.

Exemplo 2.1.2: O exemplo mais importante de espaço métrico é o conjunto \mathbb{R} dos números reais munido da métrica $d(x, y) = |x - y|$, valor absoluto da diferença $x - y$. É fácil verificar que d é uma métrica em \mathbb{R} .

Exemplo 2.1.3: Em geral, podemos definir em $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, a métrica $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ onde $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Esta é a chamada métrica euclidiana em \mathbb{R}^n .

Exemplo 2.1.4: Outras duas métricas para o espaço euclidiano \mathbb{R}^n são: $d'(x, y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$ e $d''(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$. Em geral, se $(M_1, d_1), \cdots, (M_n, d_n)$ são espaços métricos, podemos munir o produto cartesiano $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ com qualquer das seguintes três métricas: $d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2}$ ou $d'(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n)$ ou $d''(x, y) =$

$\max\{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$ onde $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in M$. Em [2] constam as demonstrações.

Exemplo 2.1.5: Todo subconjunto X de um espaço métrico M possui uma estrutura natural de espaço métrico. Basta definir a distância entre dois pontos $x, y \in X$ como a mesma distância entre eles considerados como pontos de M . Neste caso, dizemos que X tem a métrica induzida pela métrica de M e que X é um subespaço de M .

Definição 2.2: Seja E um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} . Chama-se norma em E uma função $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ ao número real $\|x\|$ chamado norma de x , tal que:

1. $\|0\| = 0$ e $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$;
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$ para quaisquer $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Podemos verificar facilmente que uma norma $\| \cdot \|$ num espaço vetorial E dá origem a uma métrica natural d em E , definida por $d(x, y) = \|x - y\|$.

Exemplo 2.1.6: A função $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$ é uma norma em \mathbb{R}^n que dá origem à métrica euclidiana.

Definição 2.3: Sejam M um espaço métrico, $r > 0$ um número real e a um ponto de M .

1. O conjunto $B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}$ chama bola aberta de centro a e raio r ;
2. O conjunto $D(a; r) = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}$ chama-se bola fechada (ou disco) de centro a e raio r ;
3. O conjunto $S(a; r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}$ chama-se esfera de centro a e raio r .

Exemplo 2.1.7: Na reta \mathbb{R} , a bola aberta $B(a; r)$ é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$ a bola fechada $D(a; r)$ é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$ e a esfera $S(a; r)$ é o par de pontos $\{a - r, a + r\}$.

Exemplo 2.1.8: No espaço \mathbb{R}^{n+1} a esfera de centro na origem e raio unitário é usualmente denotada por $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$.

Teorema 2.1: Dados um espaço métrico M e dois pontos distintos $a, b \in M$ existem duas bolas disjuntas com centro em a e b respectivamente.

Demonstração. Seja r um número real tal que $0 < r \leq d(a, b)/2$. Se existir um ponto $x \in B(a; r) \cap B(b; r)$ então $d(x, a) < r, d(x, b) < r$ e, por conseguinte, $d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, b) < 2r$, ou seja, $r > d(a, b)/2$, que é uma contradição. \square

2.1.1 Funções Contínuas

Definição 2.4: Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de um espaço métrico (M, d) num espaço métrico (N, d') e $a \in M$ um ponto. Diz-se que f é contínua em a se, dado um número real $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $d(x, a) < \delta$ implique $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Diz-se simplesmente que $f : M \rightarrow N$ é contínua se f é contínua em todos os pontos de M .

A definição acima equivale a dizer que para cada bola aberta $B(f(a); \varepsilon)$ em N existe uma bola aberta $B(a; \delta)$ em M tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$.

Exemplo 2.1.9: Sejam (M, d) e (N, d') espaços métricos. Se $f : M \rightarrow N$ é uma contração fraca, isto é, $d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, então f é contínua. De fato, se $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$. Então, $d(x, a) < \delta$ implica $d'(f(x), f(a)) \leq d(x, a) < \varepsilon$.

Do exemplo anterior, segue a continuidade de algumas aplicações bem recorrentes:

Exemplo 2.1.10: As aplicações constantes $f : M \rightarrow N$, com $f(x) = c \in N$ para todo $x \in M$ são contínuas. As inclusões $i : X \rightarrow M, i(x) = x$, onde X é um subespaço de M , são contínuas.

Exemplo 2.1.11: As projeções $p_i : M_1 \times \cdots \times M_n \rightarrow M_i$, definidas por $p_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i, i = 1, \cdots, n$, são contínuas.

Exemplo 2.1.12: A métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, de um espaço métrico M , é contínua.

2.1.2 Conjuntos Abertos num Espaço Métrico.

Definição 2.5: Um subconjunto A de um espaço métrico (M, d) é aberto se, para todo ponto $x \in A$, existe uma bola aberta $B(x, \varepsilon)$ em M tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

Teorema 2.2: Toda bola aberta $B(a; r)$ num espaço métrico M é um subconjunto aberto de M .

Demonstração. Para cada $x \in B(a; r)$, temos $d(x, a) < r$ e, portanto, $\varepsilon = r - d(x, a) > 0$. Então $B(x; \varepsilon) \subset B(a; r)$. De fato, se $y \in B(x; \varepsilon)$ então $d(y, x) < r - d(x, a)$, donde $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r$.

□

Exemplo 2.1.13: Os intervalos abertos limitados (a, b) são subconjuntos abertos da reta. Também os intervalos ilimitados, $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$ são subconjuntos abertos da reta.

Exemplo 2.1.14: Em qualquer espaço métrico M , o complementar de cada ponto $a \in M$ é um subconjunto aberto de M . De fato, se $x \in M - \{a\}$ então $\varepsilon = d(x, a) > 0$ e $B(x; \varepsilon) \subset M - \{a\}$. Mais geralmente, o complementar $M - F$ de qualquer subconjunto finito $F = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de M é um subconjunto aberto de M pois se $x \in M - F$

então $\varepsilon = \min\{d(x, a_1), \dots, d(x, a_n)\} > 0$ e a bola aberta $B(x; \varepsilon)$ não contém nenhum dos pontos a_1, \dots, a_n , isto é, $B(x; \varepsilon) \subset M - F$.

Exemplo 2.1.15: Nenhuma bola fechada $D = D(a; r)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$. Seja $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo e ponha $x = a + r \cdot v / \|v\|$. Então $\|x - a\| = r$, donde $x \in D$. Mas nenhuma bola aberta $B(x; \varepsilon)$ pode estar contida em D pois, tomando $y = a + [(r + \frac{\varepsilon}{2}) \cdot v] / \|v\|$, temos $\|x - y\| = \frac{\varepsilon}{2}$, donde $y \in B(x; \varepsilon)$, mas $\|y - a\| = r + \frac{\varepsilon}{2}$ e, portanto, $y \notin D$. O mesmo argumento mostra que nenhuma esfera $S(a; r)$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Teorema 2.3: Os subconjuntos abertos de um espaço métrico M gozam das seguintes propriedades:

1. O espaço inteiro M e o conjunto vazio \emptyset são subconjuntos abertos de M ;
2. Se $\{A_\lambda; \lambda \in L\}$ for uma família de subconjuntos abertos de M , sua reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} (A_\lambda)$ será um subconjunto aberto de M ;
3. A interseção $A_1 \cap \dots \cap A_n$ de uma família finita de subconjuntos A_1, \dots, A_n abertos em M é ainda um subconjunto aberto de M .

Demonstração. 1. É claro que M é aberto. Agora, se \emptyset não fosse aberto existiria um ponto $x \in \emptyset$ tal que nenhuma bola aberta de centro x estaria contida em \emptyset . Como um tal $x \in M$ não existe, o conjunto vazio é aberto.

2. Dado $x \in A$, existe um índice $\lambda \in L$ para o qual $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe uma bola aberta $B(x; \varepsilon)$ contida em A_λ . Logo $B(x; \varepsilon) \subset A$.

3. Seja $x \in A_1 \cap \dots \cap A_n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, existe uma bola aberta $B(x; \varepsilon_i)$ contida em A_i . Tomemos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$. Então $\varepsilon > 0$ e $B(x; \varepsilon) \subset B(x; \varepsilon_i) \subset A_i$ para cada i . Logo $B(x; \varepsilon) \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$. □

Corolário 2.1: Um subconjunto $A \subset M$ é aberto em M se, e somente se, A é uma reunião de bolas abertas de M .

Demonstração. Como toda bola aberta é um conjunto aberto, pela segunda parte do Teorema 2.3, qualquer reunião de bolas abertas é um aberto de M . Reciprocamente, se $A \subset M$ é aberto, para cada $x \in A$ existe uma bola aberta B_x tal que $\{x\} \subset B_x \subset A$. Logo, $A \subset \bigcup_{x \in A} (B_x) \subset A$. □

O próximo teorema caracteriza os subconjuntos abertos de um subespaço $X \subset M$ em termos dos abertos de M .

Teorema 2.4: Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$ um subespaço. Um subconjunto $A' \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $A' = A \cap X$, onde A é um aberto de M .

Demonstração. Indicando por B' as bolas abertas de X e por B as de M , é claro que $B'(x; \varepsilon) = B(x; \varepsilon) \cap X$ para cada $x \in X$. Pelo Corolário 2.1, $A' \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $A' = \bigcup_{x \in A'} (B'_x) = \bigcup_{x \in A'} (B_x \cap X) = (\bigcup_{x \in A'} (B_x)) \cap X = A \cap X$, onde $A = \bigcup_{x \in A'} (B_x)$ é um aberto de M . \square

O teorema seguinte mostra que o conhecimento dos subconjuntos abertos determina todas as aplicações contínuas.

Teorema 2.5: Sejam M, N espaços métricos. Para que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ seja um subconjunto aberto de M .

Demonstração. Seja f contínua e $A' \subset N$ um aberto. Mostremos que $A = f^{-1}(A')$ é aberto em M . De fato, para cada $a \in A$, $f(a) \in A'$. Sendo A' aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subset A'$. Sendo f contínua em a , existe um $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset A'$. Mas $f(B(a; \delta)) \subset A'$ implica que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A') = A$. Logo, A é aberto. Reciprocamente, suponha que $f : M \rightarrow N$ seja tal que, para todo aberto $A' \subset N$, $A = f^{-1}(A')$ é aberto em M . Seja $a \in M$ um ponto qualquer. Toda bola $B(f(a); \varepsilon) \subset N$ é um aberto de N que contém $f(a)$. Logo, $A = f^{-1}(A')$ é um aberto de M contendo a . Portanto, existe uma bola $B(a; \delta) \subset A$, donde $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$, o que prova ser f contínua em a . \square

A imagem direta $f(A)$ de um aberto $A \subset M$ por uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ não é necessariamente um aberto de N . Por exemplo, a função real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, transforma qualquer intervalo aberto do tipo $(-a, a)$ no intervalo $[0, a^2)$, que não é um subconjunto aberto da reta.

Definição 2.6: Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ que transforma cada subconjunto aberto $A \subset M$ num subconjunto aberto $f(A) \subset N$ chama-se uma aplicação aberta.

Um importante caso de aplicação aberta são as projeções:

Teorema 2.6: Seja $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ um produto cartesiano de espaços métricos. Cada projeção $p_i : M \rightarrow M_i (i = 1, \dots, n)$ é uma aplicação contínua aberta.

Demonstração. Escolhamos em M a métrica $d(x, y) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}$ onde $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in M$. Relativamente a esta métrica, $B(x; r) = B(x_1; r) \times \cdots \times B(x_n; r)$. Seja $A \subset M$ aberto e provemos que $A' = p_i(A)$ é aberto em M_i . Ora, dado $a_i \in A'$, existe $a = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ em A tal que $p_i(a) = a_i$. Sendo A aberto, existe uma bola $B = B(a; r) = B(a_1; r) \times \cdots \times B(a_i; r) \times \cdots \times B(a_n; r)$ contida em A . Segue-se que $B(a_i; r) = p_i(B) \subset p_i(A) = A'$, logo A' é aberto em M_i . \square

2.1.3 Homeomorfismos

Uma aplicação bijetiva $f : M \rightarrow N$, de um espaço métrico M sobre o espaço métrico N , pode ser contínua sem que sua inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ seja contínua. No

caso em que f^{-1} também é contínua, definimos um dos conceitos mais importantes da Topologia.

Definição 2.7: Um homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ de um espaço métrico M sobre um espaço métrico N é uma bijeção contínua de M sobre N , cuja inversa $h^{-1} : N \rightarrow M$ também é contínua. Quanto existe uma tal aplicação, dizemos que M e N são homeomorfos e escrevemos $M \cong N$.

Exemplo 2.1.16: Seja $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$ a esfera unitária do plano. A aplicação $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ dada por $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ é uma bijeção contínua mas sua inversa $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ não é contínua no ponto $a = (1, 0) = f(0)$. De fato, qualquer bola B de centro a em S^1 (um arco aberto) é tal que $f^{-1}(B)$ contém um intervalo da forma $(b, 2\pi)$. De modo que $f^{-1}(B)$ não estará contida numa pequena bola de centro 0 em $[0, 2\pi)$.

Exemplo 2.1.17: A bola aberta unitária $B = B(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ é homeomorfa ao espaço todo \mathbb{R}^n . De fato, a aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow B$, dada por $f(x) = x/(1 + \|x\|)$ é claramente contínua e bijetiva. A aplicação $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $g(y) = y/(1 - \|y\|)$ também é contínua bijetiva e tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$. Logo, $B \cong \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.18: Seja $p = (0, \dots, 0, 1)$ o polo norte da esfera unitária $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$. Temos $S^n - \{p\} \cong \mathbb{R}^n$. Este homeomorfismo é usualmente obtido pela projeção estereográfica que consiste, geometricamente, em associar cada ponto $x \in S^n - \{p\}$ ao ponto $\pi(x)$ de interseção da semi-reta \vec{px} com o hiperplano $x_{n+1} = 0$, que identificamos com \mathbb{R}^n .

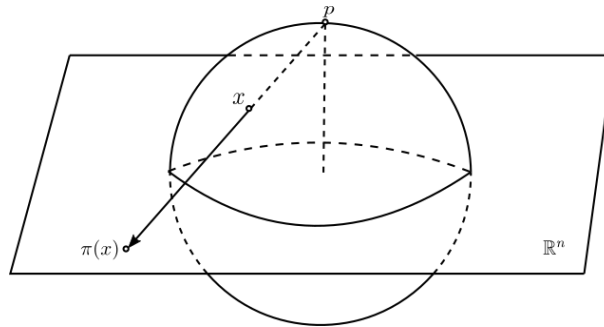


Figura 2.1: Projeção Estereográfica.

A projeção estereográfica $\pi : S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada explicitamente por

$$\pi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Sua inversa $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{p\}$ é dada por

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1).$$

Intuitivamente, dois subespaços de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 são homeomorfos se pudermos obter um a partir do outro torcendo, encurvando, esticando ou encolhendo, sem identificar pontos ou fazer cortes. Com esses movimentos podemos, por exemplo, transformar um toro (espaço que estudaremos futuramente) em uma “caneca”, como mostrado na Figura 2.2.

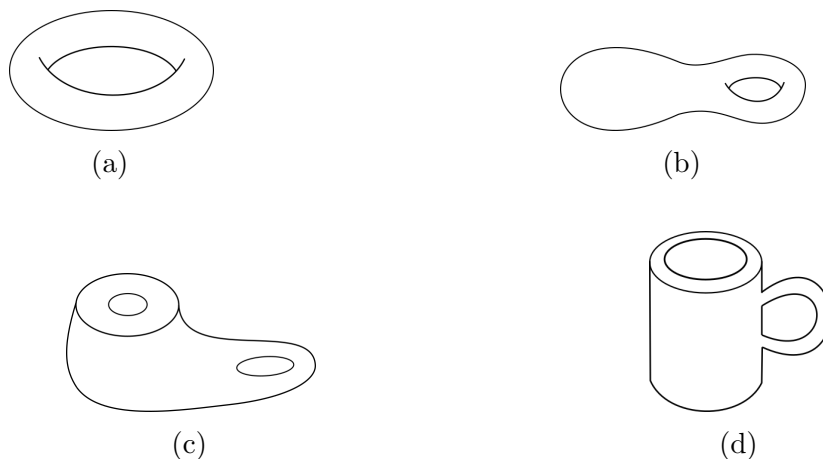


Figura 2.2: O toro é homeomorfo a uma caneca.

2.2 Espaços Topológicos

De acordo com o Teorema 2.5, o fato de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ ser contínua não depende dos números que exprimem as distâncias entre os pontos desses espaços, mas somente das coleções de conjuntos abertos de M e de N . Isto motiva a definição de um conceito mais geral, que são os espaços topológicos. Os axiomas que os conjuntos abertos de um espaço topológico satisfazem são sugeridos pelo Teorema 2.3.

Definição 2.8: Uma topologia num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados os subconjuntos abertos (segundo a topologia τ) satisfazendo as seguintes condições:

1. X e o subconjunto vazio \emptyset são abertos;
2. A reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;
3. A interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X . Quando a topologia utilizada está clara, escrevemos apenas X .

Definição 2.9: Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y , diz-se contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ é um aberto de X .

Mais especificamente, f diz-se contínua em $a \in X$ se, para cada aberto $B \subset Y$, com $f(a) \in B$, existir um aberto $A \subset X$, com $a \in A$, tal que $f(A) \subset B$. A relação $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ mostra que a composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ de duas aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ é uma aplicação contínua.

Definição 2.10: Um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ de um espaço topológico X sobre um espaço topológico Y é uma bijeção contínua de X sobre Y , cuja inversa $h^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua. Escrevemos $X \cong Y$.

Todo espaço métrico M pode ser considerado, de modo natural, como um espaço topológico quando se toma em M a coleção de abertos definidos a partir de sua métrica. Um espaço topológico X diz-se metrizable quando é possível definir uma métrica d em X tal que os abertos definidos por d coincidem com os abertos da topologia de X . Nem todo espaço topológico é metrizable.

Exemplo 2.2.1: Seja X um conjunto qualquer. Podemos definir uma topologia τ_0 em X tomando todos os subconjuntos de X como abertos. Esta é a chamada topologia discreta e (X, τ_0) é um espaço metrizable: basta considerar a métrica na qual $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Por outro lado, podemos considerar a topologia τ_1 em X , na qual os únicos abertos são X e \emptyset . Esta é a topologia caótica e se X contiver pelo menos dois pontos, (X, τ_1) não será um espaço metrizable.

Exemplo 2.2.2: Um caso interessante de topologia em um conjunto X é obtido tomando-se como abertos o conjunto vazio \emptyset e os conjuntos da forma $X - F$, onde $F \subset X$ é finito. De fato, a primeira condição da definição é de verificação imediata. A segunda e a terceira condições seguem das igualdades $\cup(X - F_\lambda) = X - \cap F_\lambda$ e $\cap(X - F_\lambda) = X - \cup(F_\lambda)$.

2.2.1 Topologia Induzida

Dado um espaço topológico, (X, τ) e um subconjunto $S \subset X$, podemos definir em S , de maneira natural, a seguinte topologia:

Definição 2.11: Seja (X, τ) um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto. A topologia em S induzida pela topologia de X é a família $\mathcal{F} = \{S \cap U; U \in \tau\}$.

Para que a definição acima faça sentido, precisamos verificar os três axiomas que definem uma topologia. É imediato que $\emptyset, S \in \mathcal{F}$ pois $\emptyset = S \cap \emptyset$ e $S = S \cap X$. Se $S \cap U_1$ e $S \cap U_2$ são elementos de \mathcal{F} , então $(S \cap U_1) \cap (S \cap U_2) = S \cap (U_1 \cap U_2)$ também o é. Por fim, se $\{S \cap U_\lambda; \lambda \in L\}$ é uma família de elementos de \mathcal{F} , então $\bigcup_{\lambda \in L} (S \cap U_\lambda) = S \cap (\bigcup_{\lambda \in L} (U_\lambda))$ pertence a \mathcal{F} .

Quando o espaço $S \subset X$ é tomado com a topologia induzida de X , dizemos que S é um subespaço de X .

Exemplo 2.2.3: Se tomarmos $[a, b]$ como subespaço de \mathbb{R} (considerado com a topologia usual), então os intervalos $[a, c), (d, b]$ e (c, d) , $a < c < d < b$ são abertos em $[a, b]$. Se considerarmos o círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ como subespaço de \mathbb{R}^2 , seus abertos serão

reuniões de “arcos abertos.”

Exemplo 2.2.4: Se X for um espaço metrizável, então a topologia induzida em qualquer subconjunto $S \subset X$ também é metrizável, isto é, se d é uma métrica em X , a restrição de d a S define abertos que coincidirão com os deste subespaço.

2.2.2 Interior, Fronteira e Vizinhança

Nesta seção, definiremos mais três conceitos topológicos que apresentam estreita dependência entre si.

Definição 2.12: Sejam X um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto.

1. Um ponto $x \in S$ diz-se um ponto interior de S quando existe um aberto A de X tal que $x \in A \subset S$. O interior de S é o conjunto $\text{int}(S)$ formado pelos pontos interiores de S ;
2. Diz-se que um conjunto $V \subset X$ é uma vizinhança de um ponto $x \in X$ se $x \in \text{int}(V)$, isto é, V contém um aberto que contém x ;
3. A fronteira de S é o conjunto $\text{fr}(S)$ formado por todos os $x \in X$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de S e do complementar $X - S$.

Teorema 2.7: O interior de um conjunto S , num espaço topológico X , é a reunião de todos os subconjuntos abertos de X que estão contidos em S . Em particular, $\text{int}(S)$ é aberto em X .

Demonstração. Seja $A = \cup A_\lambda$ a reunião de todos os abertos $A_\lambda \subset S$. Então, A é aberto em X e $A \subset S$, logo, $x \in A$ implica $x \in \text{int}(S)$. Reciprocamente, se $x \in \text{int}(S)$ existe um aberto A' em X tal que $x \in A' \subset S$. Logo, $A' = A_\lambda$ para algum λ e, portanto, $A' \subset A$, donde $x \in A$. \square

Exemplo 2.2.5: No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , o interior de um bola fechada $D(a; r)$ é a bola aberta $B(a; r)$ de mesmo centro e mesmo raio. Num espaço métrico arbitrário, pode-se afirmar apenas que $B(a; r) \subset \text{int}(D(a; r))$. De fato, no subespaço $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 1\}$, o ponto $p = (0, 1)$ é interior ao quadrado $D = \{(x, y) \in M; |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ mas não pertence à bola aberta correspondente.

Exemplo 2.2.6: $\text{int}(S) = \emptyset \iff S \subset \text{fr}(S)$. Todo ponto de S que não pertence a $\text{int}(S)$ pertence a $\text{fr}(S)$. Um conjunto S é aberto se, e somente se, $S \cap \text{fr}(S) = \emptyset$. No espaço \mathbb{R}^n a fronteira da bola (aberta ou fechada) de centro a e raio r é a esfera $S(a; r)$. A fronteira do conjuntos \mathbb{Q} , dos números racionais, é toda a reta \mathbb{R} .

2.2.3 Conjuntos Fechados

Outro conceito elementar que merece destaque é o de conjunto fechado, o qual é definido da seguinte maneira.

Definição 2.13: Um subconjunto F de um espaço topológico X diz-se fechado quando o seu complementar $X - F$ é aberto.

Seguem daí, duas importantes propriedades:

Teorema 2.8: Seja X um espaço topológico. Então valem as seguintes afirmações:

1. O conjunto vazio \emptyset e o espaço inteiro X são fechados;
2. A interseção $F = \cap F_\lambda$ de uma família qualquer $\{F_\lambda; \lambda \in L\}$ de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset X$ é um subconjunto fechado de X ;
3. A reunião $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, \dots, F_n \subset X$ é um subconjunto fechado de X .

Demonstração. 1. Imediato.

2. Basta observar que o complementar $X - F = X - \cap F_\lambda = \cup (X - F_\lambda)$ é aberto.
3. Analogamente, $X - F = X - \cup F_k = \cap (X - F_k)$ é aberto.

□

O Teorema 2.8 sugere uma maneira equivalente de se definir espaço topológico à que foi feita no início da seção. Podemos também definir a noção de função contínua de modo totalmente análogo, como mostra o próximo resultado.

Teorema 2.9: Sejam X, Y espaços topológicos. Para que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F')$ de todo subconjunto fechado $F' \subset Y$ seja um fechado de X .

Demonstração. Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. Dado $F' \subset Y$ fechado, $Y - F'$ é aberto e, pela continuidade de f , $f^{-1}(Y - F') = X - f^{-1}(F')$ é aberto, donde $f^{-1}(F')$ é fechado em X . Reciprocamente, dado um aberto $A' \subset Y$, $f^{-1}(Y - A') = X - f^{-1}(A')$ é fechada em X , donde $f^{-1}(A')$ é aberto em X e, portanto, f é contínua. □

Definição 2.14: Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ diz-se fechada quando, para todo subconjunto fechado $F \subset X$, sua imagem $f(F)$ é fechada em Y .

Se $S \subset X$ é um subespaço do espaço topológico X , então os subconjuntos fechados F' de S são da forma $F' = F \cap S$, onde F é um fechado de X .

Exemplo 2.2.7: Seja $M = \mathbb{R} - \{0\}$ o conjunto dos números reais diferentes de zero, com a métrica induzida da reta. Então, $M = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Cada um desses dois intervalos é evidentemente aberto em M . Por outro lado cada um deles também é fechado pois seu complementar em M é aberto.

Exemplo 2.2.8: Sejam X, Y espaços topológicos, F_1, \dots, F_n subconjuntos fechados de X tais que $X = F_1 \cup \dots \cup F_n$ e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação tal que as restrições $f_i = f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y, i = 1, \dots, n$, são todas contínuas. Então $f : X \rightarrow Y$ é contínua. Com efeito, dado $F \subset Y$ fechado, temos $f^{-1}(F) = f_1^{-1}(F) \cup \dots \cup f_n^{-1}(F)$. Ora, cada $f_i^{-1}(F)$ é fechado em F_i e, portanto, em X . Assim, $f^{-1}(F)$ é fechado em X , donde f é contínua.

Esta observação é de grande utilidade para a definição de aplicações contínuas por meio de diferentes construções, cada uma delas efetuada numa parte fechada. Por exemplo, dados um espaço topológico X e duas aplicações contínuas $f : [0, a] \rightarrow X, g : [a, 1] \rightarrow X$, tais que $f(a) = g(a)$, onde $0 < a < 1$, a aplicação $h : [0, 1] \rightarrow X$, definida por $h(t) = f(t)$, para $0 \leq t \leq a$ e $h(t) = g(t)$, para $a \leq t \leq 1$ é contínua.

Definição 2.15: Seja S um subconjunto de um espaço topológico X . Um ponto $x \in X$ diz-se aderente à S quando toda vizinhança de x em X contém pelo menos um ponto de S . O conjunto dos pontos de X que são aderentes a S chama-se fecho de S e indica-se por \bar{S} .

Evidentemente, $S \subset \bar{S}$ qualquer que seja $S \subset X$.

Teorema 2.10: O fecho de um subconjunto S num espaço topológico X é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contém S . Em particular \bar{S} é fechado.

Demonstração. Seja $\{F_\lambda; \lambda \in L\}$ a família de todos os fechados de X que contém S . Então, $A_\lambda = X - F_\lambda$ são todos os abertos de X contidos em $X - S$. A definição de ponto aderente significa que $x \in \bar{S}$ se, e somente se, $x \notin \text{int}(X - S)$. Ora, $\text{int}(X - S) = \cup A_\lambda$. Logo, $\bar{S} = X - \text{int}(X - S) = X - \cup A_\lambda = \cap (X - A_\lambda) = \cap F_\lambda$. \square

Exemplo 2.2.9: Num espaço discreto X , $\bar{S} = S$ para todo subconjunto de $S \subset X$, pois todo subconjunto é fechado. Na reta, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ pois em todo intervalo da reta existem números racionais. Ainda em \mathbb{R} o fecho de um intervalo aberto (a, b) é o intervalo fechado $[a, b]$.

Exemplo 2.2.10: Mais geralmente, no espaço \mathbb{R}^n , o fecho da bola aberta $B = B(a; r)$ é a bola fechada $D = D(a; r)$. De fato, como D é um fechado de \mathbb{R}^n contendo B , temos que $\bar{B} \subset D$. Agora, como $D = B \cup S$, onde S é a esfera de centro a e raio r , basta mostrar $S \subset \bar{B}$. Seja, $x \in S$, isto é, $|x - a| = r$. Para qualquer bola $B(x; \varepsilon)$, o ponto $y = a + (1 - \frac{\varepsilon}{2r})(x - a)$ é tal que $|y - a| = r - \frac{\varepsilon}{2} < r$ e $|y - x| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, donde $y \in B(x; \varepsilon) \cap B$. Logo, $x \in \bar{B}$, e concluímos que $\bar{B} = D$.

2.2.4 Topologia Quociente

Discutiremos agora uma maneira de obter novos espaços topológicos a partir de um dado espaço. O tipo de topologia que introduziremos a seguir é, essencialmente, o mais importante deste trabalho.

Definição 2.16: Sejam dados (X, τ) um espaço topológico, Q um conjunto qualquer e

$\varphi : X \rightarrow Q$ uma aplicação sobrejetiva. A coleção $\mathcal{C}_\varphi = \{U \subset Q; \varphi^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}$ é uma topologia em Q chamada topologia quociente em relação a aplicação φ .

Verifica-se facilmente que \mathcal{C}_φ é uma topologia em Q . É claro que $Q, \emptyset \in \mathcal{C}_\varphi$. As demais condições seguem do fato de que $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$ e $f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in L} (U_\lambda)) = \bigcup_{\lambda \in L} (f^{-1}(U_\lambda))$.

Relativamente à topologia quociente, a aplicação $\varphi : X \rightarrow Q$ é contínua. Além disso, dado $C \subset Q$, se $C \notin \mathcal{C}_\varphi$, então $\varphi^{-1}(C)$ não é aberto em X . Logo, qualquer topologia em Q que contém \mathcal{C}_φ propriamente, torna φ descontínua.

O seguinte critério de continuidade tem papel importante no desenvolvimento dos próximos resultados.

Teorema 2.11: Seja $g : Q \rightarrow Z$, onde Z é um espaço topológico qualquer e Q possui a topologia quociente relativamente à aplicação $\varphi : X \rightarrow Q$. Então $g : Q \rightarrow Z$ é contínua se, e somente se, $g \circ \varphi : X \rightarrow Z$ é contínua.

Demonstração. Como φ é contínua, a continuidade de g implica a continuidade da composta $g \circ \varphi$. Reciprocamente, se $g \circ \varphi : X \rightarrow Z$ é contínua, para cada aberto $C \subset Z$, $(g \circ \varphi)^{-1}(C) = \varphi^{-1}(g^{-1}(C))$ é aberto em X . Pela definição de topologia quociente, $g^{-1}(C)$ é aberto em Q e, por conseguinte, $g : Q \rightarrow Z$ é contínua. \square

Exemplo 2.2.11: Na esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$, com a topologia induzida de \mathbb{R}^{n+1} , tomemos o conjunto dos pares de pontos antípodas (não ordenados) $\mathbb{R}P^n = \{\{p, -p\}; p \in S^n\}$. Considere a aplicação sobrejetiva $\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, definida por $\varphi(p) = \{p, -p\}$. O espaço $\mathbb{R}P^n$, com a topologia quociente relativa a φ , é chamado espaço projetivo real de dimensão n . Em particular, $\mathbb{R}P^2$ é chamado plano projetivo real.

Exemplo 2.2.12: No cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$, com a topologia induzida de \mathbb{R}^3 , considere o conjunto dos pares não ordenados $M = \{\{p, -p\}; p \in C\}$ com a topologia quociente relativa a aplicação $\varphi : C \rightarrow M$, $\varphi(p) = \{p, -p\}$. O espaço M é chamado faixa de Möebius.

Agora, seja X um espaço topológico e \sim uma relação de equivalência em X . No conjunto X/\sim , quociente de X pela relação \sim , consideremos a topologia quociente relativa a aplicação $\varphi : X \rightarrow (X/\sim)$ que associa a cada $x \in X$ a classe de equivalência $\varphi(x)$ que o contém. A aplicação φ é chamada aplicação quociente ou identificação e o espaço X/\sim é chamado espaço quociente. Como veremos a seguir, esse é o caso mais geral de topologia quociente.

Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ um aplicação contínua sobre Y . Seja \sim a relação de equivalência em X assim definida: $x \sim x'$ se, e somente se, $f(x) = f(x')$. Consideremos a aplicação quociente $\varphi : X \rightarrow (X/\sim)$. Existe uma única aplicação $\bar{f} : (X/\sim) \rightarrow Y$ tal que $\bar{f}(\varphi(x)) = f(x)$. Como $\bar{f} \circ \varphi = f : X \rightarrow Y$ é contínua segue, pelo Teorema 2.11, que \bar{f} é contínua. Mais ainda, ela é bijetiva.

Teorema 2.12: Com a terminologia usada acima, $\bar{f} : (X/\sim) \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se, e somente se, Y tem a topologia quociente relativa a f .

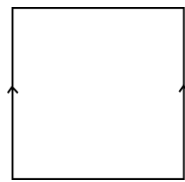
Demonstração. É fácil ver que, para todo $C \subset X/\sim$, tem-se $\varphi^{-1}(C) = f^{-1}(\bar{f}(C))$. Logo, C é aberto em $X/\sim \Leftrightarrow \varphi^{-1}(C)$ é aberto em $X \Leftrightarrow f^{-1}(\bar{f}(C))$ é aberto em $X \Leftrightarrow \bar{f}(C) \subset Y$ aberto na topologia quociente relativa a f . \square

Este resultado terá importância crucial no próximo capítulo, quando efetuarmos o primeiro passo da demonstração do principal teorema abordado neste trabalho. Vejamos agora outros exemplos clássicos de espaços quocientes.

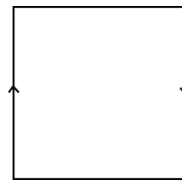
Exemplo 2.2.13: No quadrado $I^2 = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$, com a topologia induzida de \mathbb{R}^2 , definamos a relação de equivalência $(0, y) \sim (1, y)$, e trivial nos demais pontos. O espaço quociente I^2/\sim é homeomorfo a um cilindro.

Exemplo 2.2.14: Também do quadrado I^2 , podemos obter um espaço homeomorfo ao do Exemplo 2.2.12, que naturalmente chamamos faixa de Möebius, definindo a relação de equivalência segunda a qual $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ e trivial nos demais pontos.

Nas figuras, as setas mostram quais e de que maneira os pontos devem ser identificados.



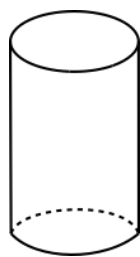
(a) Cilindro



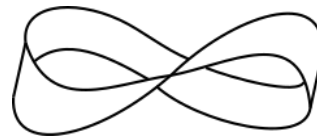
(b) Faixa de Möebius

Figura 2.3

Após fazer as identificações, obtemos as figuras:



(a) Cilindro



(b) Faixa de Möebius

Figura 2.4

Exemplo 2.2.15: Chama-se toro (algumas vezes denotamos por \mathbb{T}^2) ao espaço quociente obtido do quadrado unitário sob a relação de equivalência $(0, y) \sim (1, y)$, $(x, 0) \sim (x, 1)$ e trivial nos demais pontos. As identificações a serem feitas são mostradas abaixo.

É intuitivo, ao fazer as identificações dos exemplos acima, que os subconjuntos de \mathbb{R}^3 obtidos sejam, como subespaços, homeomorfos aos espaços quociente que lhe

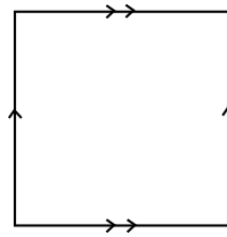


Figura 2.5: Toro como espaço quociente.

deram origem. Na verdade, podemos definir geometricamente esses subespaços de \mathbb{R}^3 e mostrar que de fato são homeomorfos ao seu respectivo espaço quociente. Faremos isso para o toro, na Seção 2.3.

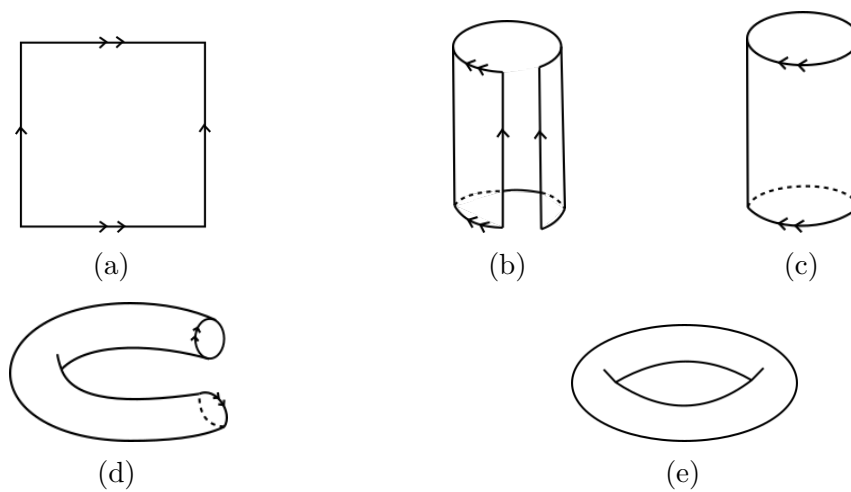


Figura 2.6: Identificações no toro.

Exemplo 2.2.16: Outro bem conhecido espaço quociente obtido do quadrado I^2 é a garrafa de Klein (Figura 2.7), cujas relações não triviais sobre I^2 são $(0, y) \sim (1, y)$ e $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$.

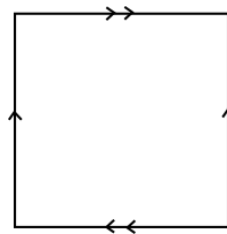


Figura 2.7: Garrafa de Klein como espaço quociente.

Um processo de identificações análogo ao que fizemos no toro não é tão simples na garrafa de Klein. De fato, a primeira identificação é simples mas a segunda acontece no espaço \mathbb{R}^4 . A representação que obtemos da garrafa de Klein no espaço \mathbb{R}^3 é mostrada na Figura 2.8.

Exemplo 2.2.17: Como vimos no Exemplo 2.2.11, o plano projetivo real \mathbb{RP}^2 é

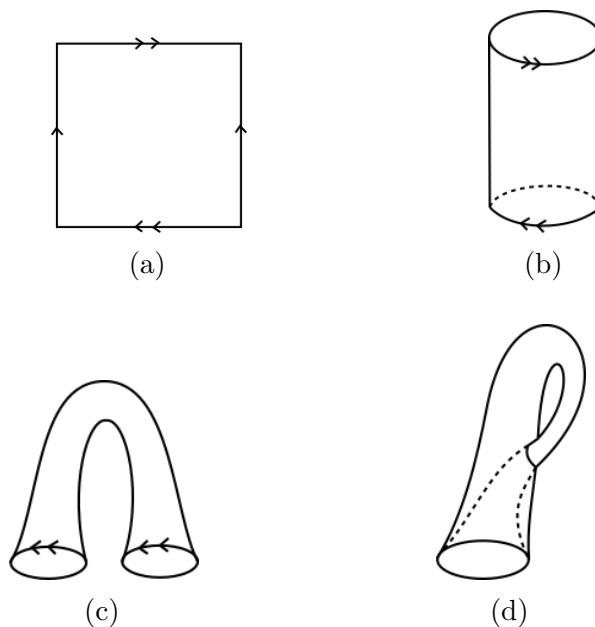


Figura 2.8: Identificações na garrafa de Klein.

definido como o espaço quociente S^2 / \sim , onde $x \sim x'$ se, e somente se $x = x'$ ou $x = -x'$. Como o hemisfério norte de S^2 se identifica ao hemisfério sul, podemos restringir nossa atenção ao hemisfério norte fechado, que é homeomorfo ao disco $D = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq 1\}$ via a projeção $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Portanto, podemos definir o plano projetivo real \mathbb{RP}^2 como D / \sim , onde $x \sim x'$ se, e somente se, $x = x'$ ou $x, x' \in S^1 \subset D$ e $x = -x'$ (Figura 2.9).

Exemplo 2.2.18: A esfera S^2 pode ser tomada como o espaço quociente obtido do disco D ou do quadrado unitário I^2 , com as identificações mostradas na Figura 2.10. Podemos imaginar esse espaço como uma bolsa com um zíper aberto. Após ser fechada e inflada, a bolsa transforma-se numa bola.

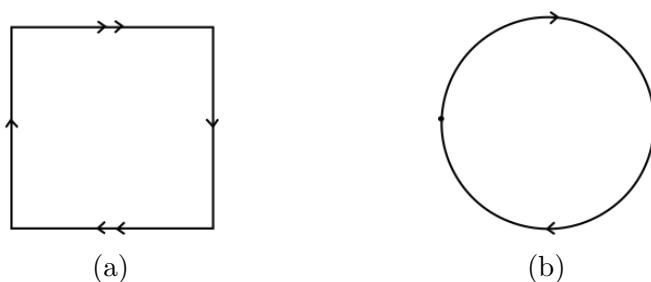


Figura 2.9: Plano projetivo.

Uma consideração simples mas útil que nos cabe fazer é a seguinte: as identificações nos espaços quociente podem ser feitas de uma só vez ou divididas em etapas. Por exemplo, no toro, poderíamos identificar os dois pares de lados do quadrado de uma vez, para obter a Figura 2.6e, ou tomar a relação de equivalência no cilindro, para obter o toro. Essa ideia está contida no seguinte resultado:

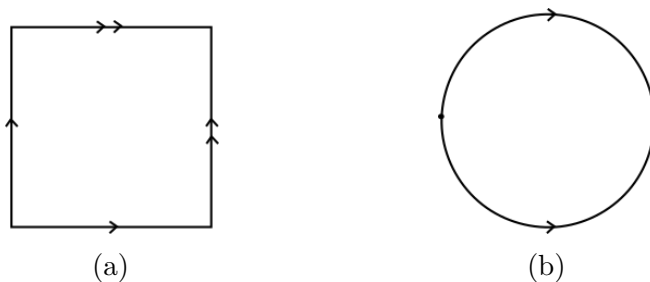


Figura 2.10: Esfera como espaço quociente.

Teorema 2.13: Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ aplicações sobrejetivas. Suponha que Y tem a topologia quociente relativa a f e Z tem a topologia quociente relativa a g . Então Z tem a topologia quociente relativa a $g \circ f : X \rightarrow Z$.

Demonstração. Basta observar que $A \subset Z$ é aberto $\Leftrightarrow g^{-1}(A)$ é aberto em $Y \Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ é aberto em X . \square

2.2.5 Base e Topologia produto

Muitas vezes, para introduzir uma topologia num conjunto X , não é preciso descrever todos os abertos de X mas apenas os abertos “básicos”, no sentido que definiremos a seguir.

Definição 2.17: Uma base num espaço topológico X é uma coleção \mathfrak{B} de subconjuntos abertos de X , tal que, todo aberto $A \subset X$ se exprime como uma reunião $A = \cup B_\lambda$ de abertos $B_\lambda \in \mathfrak{B}$, chamados abertos básicos.

Exemplo 2.2.19: As bolas abertas constituem uma base para a topologia de um espaço métrico M .

Teorema 2.14: Seja X um espaço topológico. Uma coleção \mathfrak{B} de abertos de X constitui uma base em X se, e somente se, para cada aberto $A \subset X$ e cada ponto $x \in A$, existe um aberto básico $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$.

Demonstração. De $x \in B_x \subset A$ temos $A = \cup_{x \in A} \{x\} \subset \cup_{x \in A} B_x \subset A$. Reciprocamente, se todo aberto $A \subset X$ é da forma $A = \cup B_\lambda, B_\lambda \in \mathfrak{B}$, dado $x \in A$, existe algum λ tal que $x \in B_\lambda \in \mathfrak{B}$. \square

De acordo com o teorema 2.14, poderíamos escolher como base de um espaço métrico M as bolas abertas de raio $1/n$, com n inteiro positivo.

Teorema 2.15: Seja \mathfrak{B} uma coleção de subconjuntos de um conjunto X . Então, para que \mathfrak{B} seja base de uma topologia em X é necessário e suficiente que se cumpram as seguintes condições:

1. Para cada $x \in X$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B$;
2. Se $x \in B_1 \cap B_2$, onde $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, então existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Demonstração. Seja \mathfrak{B} um a coleção com as propriedades acima. Considere a coleção τ de todas as partes $A = \cup B_\lambda$ de X que se exprimem como reunião de conjuntos $B_\lambda \in \mathfrak{B}$, e mais o conjunto vazio. Pela primeira condição, a reunião de todos os $B \in \mathfrak{B}$ é X , donde $X \in \tau$. Pela definição de τ , a reunião de uma família qualquer de elementos de τ ainda pertence a τ . Finalmente, se $A = \cup B_\lambda$ e $A' = \cup B_\mu$ pertencem a τ , então $A \cap A' = \cup (B_\lambda \cap B_\mu)$. Pela segunda condição cada $B_\lambda \cap B_\mu$ é reunião de elementos de \mathfrak{B} e, portanto, $A \cap A'$ é reunião de elementos de \mathfrak{B} . Logo τ é uma topologia em X , que admite \mathfrak{B} como base. A recíproca é imediata. \square

Um exemplo importante de topologia definida por uma base é o seguinte: Sejam X_1, \dots, X_n , espaços topológicos. No conjunto $X = X_1 \times \dots \times X_n$, consideremos a coleção \mathfrak{B} formada pelos “abertos elementares” $A = A_1 \times \dots \times A_n$, onde $A_1 \subset X_1, \dots, A_n \subset X_n$ são abertos. Como $(A_1 \times \dots \times A_n) \cap (B_1 \times \dots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \dots \times (A_n \cap B_n)$ segue do teorema anterior que \mathfrak{B} é base de uma topologia em X . Esta é a chamada topologia produto e sempre que considerarmos $X = X_1 \times \dots \times X_n$ como espaço topológico é a topologia produto que tomaremos em X .

Exemplo 2.2.20: Se $X = X_1 \times \dots \times X_n$, então as projeções são contínuas e abertas. De fato, se $A \subset X_i$ é aberto então, $p_i^{-1}(A) = X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times A \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$ é aberto em X . Reciprocamente, se $A = \cup (A_{\lambda_1} \times \dots \times A_{\lambda_n})$ é um aberto de X , então $p_i(A) = \cup p_i(A_{\lambda_1} \times \dots \times A_{\lambda_n}) = \cup A_{\lambda_i}$ é aberto em X_i . Segue daí que o subespaço $X_1 \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_n\}$ é homeomorfo a X_1 para qualquer escolha dos pontos $x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$.

2.2.6 Espaços de Hausdorff

Os espaços topológicos mais interessantes tem a propriedade de que pontos distintos podem ser “separados” por abertos disjuntos. Esta propriedade, que é um invariante topológico, isto é, é preservada por homeomorfismos, é requerida na demonstração de importantes teoremas.

Definição 2.18: Um espaço topológico X chama-se um espaço de Hausdorff (ou espaço separado) quando, dados dois pontos arbitrários $x \neq y$ em X , existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

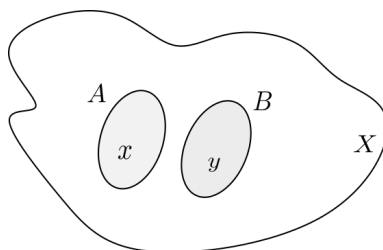


Figura 2.11: Pontos $x \neq y$ num espaço de Hausdorff.

Exemplo 2.2.21: É fácil provar que todo espaço metrizável é de Hausdorff (Teorema 2.1). Todo espaço topológico discreto é de Hausdorff mas a topologia caótica num espaço com pelo menos dois pontos não é de Hausdorff. Resulta imediatamente da definição que, num espaço de Hausdorff X , o complementar $X - \{x\}$ de cada ponto $x \in X$ é um subconjunto aberto de X . Esta última propriedade, no entanto, não é suficiente para que X seja um espaço de Hausdorff, como se vê no exemplo seguinte.

Exemplo 2.2.22: Seja X um conjunto infinito com a topologia do Exemplo 2.2.2 formada pelo conjunto vazio \emptyset mais os complementares dos subconjuntos finitos de X . Com esta topologia, X não é um espaço de Hausdorff. De fato, dados os abertos não vazios $A, B \subset X$, tem-se $A = X - F, B = X - G$, com F, G subconjuntos finitos de X ; daí $A \cap B = X - (F \cup G) \neq \emptyset$. Evidentemente o complementar $X - \{x\}$ de cada x , está em τ .

Teorema 2.16: Um subespaço S de um espaço X de Hausdorff também é de Hausdorff.

Demonstração. Dados dois pontos distintos $x, y \in S$ existem abertos A e B em X tais que $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Daí $S \cap A$ e $S \cap B$ são abertos disjuntos em S contendo x e y respectivamente. \square

Teorema 2.17: Sejam X e Y espaços topológicos. O espaço produto $X \times Y$ é de Hausdorff se, e somente se, X e Y são de Hausdorff.

Demonstração. Suponha que X e Y são de Hausdorff e tome dois pontos distintos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Suponhamos que $x_1 \neq x_2$. Existem dois abertos disjuntos A_1 e A_2 em X com $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$ e, por conseguinte, $A_1 \times Y$ e $A_2 \times Y$ são abertos disjuntos em $X \times Y$, contendo (x_1, y_1) e (x_2, y_2) respectivamente. O caso em que $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$ é totalmente análogo. Agora, se $X \times Y$ é de Hausdorff, os subespaços $X \times \{y\}$ e $\{x\} \times Y$ também o são. Como esses últimos são homeomorfos a X e Y , concluímos que X e Y são de Hausdorff. \square

Exemplo 2.2.23: Os subespaços $I^n \subset \mathbb{R}^n$ e $S^1 \times \dots \times S^1$ são de Hausdorff.

2.3 Compacidade

A noção geral de espaço compacto é definida com base na propriedade característica dos intervalos fechados $[a, b] \subset \mathbb{R}$, que são compactos no sentido da Análise Real, de que toda cobertura aberta de $[a, b]$ admite uma subcobertura finita. A compacidade também é um invariante topológico.

Definição 2.19: 1. Seja X um espaço topológico e $S \subset X$ um subespaço. Uma cobertura de S é uma família de subconjuntos $\mathcal{C} = \{U_\lambda \subset X; \lambda \in L\}$ tal que $S \subset \bigcup_{\lambda \in L} (U_\lambda)$;

2. Se L é finito dizemos que a cobertura \mathcal{C} é finita. Se cada $U_\lambda \in \mathcal{C}$ é aberto então a cobertura é aberta;

3. Se \mathcal{C} e \mathcal{C}' são coberturas de S tais que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ então \mathcal{C}' é uma subcobertura de \mathcal{C} .

Exemplo 2.3.1: Seja \mathbb{R} com a topologia usual e $(0, 1) \subset \mathbb{R}$. Então $\mathcal{C} = \{(1/n, 1 - 1/n); n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de $(0, 1)$. O conjunto $\mathcal{A} = \{(r, r + 2); r \in \mathbb{R}\}$ é uma cobertura de \mathbb{R} e $\mathcal{B} = \{(r, r + 2); r \in \mathbb{Z}\}$ é uma subcobertura de \mathcal{A} .

Definição 2.20: Um subespaço $S \subset X$ diz-se compacto se toda cobertura aberta de S admite uma subcobertura finita.

Exemplo 2.3.2: Seja X um espaço com a topologia discreta. Então X é compacto se, e somente se, X é finito.

Exemplo 2.3.3: A reta \mathbb{R} não é compacta pois $\mathcal{C} = \{(n, n + 2); n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura de \mathbb{R} que não possui subcobertura finita.

Teorema 2.18: Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. Se $S \subset X$ é compacto então $f(S) \subset Y$ é compacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{C} = \{U_\lambda; \lambda \in L\}$ uma cobertura de $f(S)$. Então $\mathcal{D} = \{f^{-1}(U_\lambda); \lambda \in L\}$ é uma cobertura de S . Como S é compacto, existe uma subcobertura finita $\{f^{-1}(U_{\lambda_i}); i = 1, \dots, n\}$ de \mathcal{D} . Logo, de $f(f^{-1}(U_{\lambda_i})) \subset U_{\lambda_i}$, segue que $\{U_{\lambda_i}; i = 1, \dots, n\}$ é uma subcobertura finita de \mathcal{C} . \square

Corolário 2.2: Sejam X e Y espaços topológicos.

1. X é compacto se, e somente se, Y é compacto;
2. Se X é compacto e Y tem a topologia quociente induzida por uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ então Y é compacto;

Teorema 2.19: Todo subconjunto fechado S de um espaço compacto X é também compacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{C} = \{U_\lambda; \lambda \in L\}$ uma cobertura aberta de S . Então, $\mathcal{C} \cup \{X - S\}$ é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, existe uma subcobertura da forma $\{U_{\lambda_i}; i = 1, \dots, n\}$ ou $\{U_{\lambda_i}; i = 1, \dots, n\} \cup \{X - S\}$. Logo, $\{U_{\lambda_i}; i = 1, \dots, n\}$ é uma subcobertura finita de \mathcal{C} . \square

Teorema 2.20: X e Y são compactos se, e somente se, $X \times Y$ é compacto.

Demonstração. Como as projeções $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ são contínuas, se $X \times Y$ é compacto, X e Y também o são. Reciprocamente, seja $\mathcal{C} = \{U_\lambda; \lambda \in L\}$ uma cobertura aberta de $X \times Y$. Cada U_λ é da forma $\bigcup_{\theta \in K} (V_{\lambda, \theta} \times W_{\lambda, \theta})$ onde $V_{\lambda, \theta}$ é um aberto de X e $W_{\lambda, \theta}$ um aberto de Y . Portanto $\mathcal{C}' = \{V_{\lambda, \theta} \times W_{\lambda, \theta}; \lambda \in L \text{ e } \theta \in K\}$ é uma cobertura aberta de $X \times Y$. Para cada $x \in X$, temos que $\{x\} \times Y$ é compacto (é homeomorfo a Y) e, uma vez que \mathcal{C}' também é uma cobertura de $\{x\} \times Y$, existe uma subcobertura finita

$\{V_i(x) \times W_i(x); i = 1, \dots, n(x)\}$ para $\{x\} \times Y$. Definindo $V'(x) = \bigcap_{i=1}^{n(x)} (V_i(x))$, temos que a família $\{V'(x); x \in X\}$ é uma cobertura aberta de X e, portanto, tem uma subcobertura finita $\{V'(x_j); j = 1, \dots, m\}$. É claro que $\{V'(x_j) \times W_{\theta_j}(x_j); j = 1, \dots, m$ e $\theta_j = 1, \dots, n(x_j)\}$ é uma cobertura aberta finita de $X \times Y$ tal que, para cada j e θ_j existe $\lambda \in L$ e $\theta \in K$ tal que $V'(x_j) \times W_{\theta_j}(x_j) \subset V_{\lambda, \theta} \times W_{\lambda, \theta} \subset U_{\lambda}$. Logo existe uma subcobertura finita de \mathcal{C} para $X \times Y$. \square

Os compactos do espaço euclidiano \mathbb{R}^n admitem a seguinte caracterização (ver demonstração em [2]):

Teorema 2.21: (Borel-Lebesgue.) Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.

Exemplo 2.3.4: Se I é um intervalo fechado, então $I^2 = I \times I$ é compacto. Em geral I^n é compacto. O toro \mathbb{T}^2 é compacto, pois é imagem de I^2 por uma aplicação quociente.

Exemplo 2.3.5: A esfera S^n (fechada e limitada), bem como o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ (imagem da identificação $\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$) são compactos. A faixa de Möebius, imagem de I^2 por uma aplicação quociente, é compacta.

Teorema 2.22: Seja X um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto $K \subset X$ é fechado em X .

Demonstração. Tome $x \in X - K$. Para cada $y \in K$ existem abertos A_y contendo x e B_y contendo y , tais que $A_y \cap B_y = \emptyset$. Obtemos daí uma cobertura $\mathcal{C} = \{B_y; y \in K\}$ para K , da qual extraímos uma subcobertura finita $\{B_{y_i}; i = 1, \dots, n\}$. Definindo o aberto $A = \bigcap_{i=1}^n (A_{y_i})$ vemos que $x \in A$ mas $A \cap K = \emptyset$. \square

Do Teorema anterior e dos Teoremas 2.18 e 2.19 temos o seguinte resultado, que terá importância central mais tarde:

Teorema 2.23: Se X for compacto e Y for um espaço de Hausdorff, toda aplicação contínua sobrejetiva $f : X \rightarrow Y$ é uma identificação, isto é, Y tem a topologia quociente relativa à f .

Demonstração. Com efeito, se $A \subset Y$ é tal que $f^{-1}(A)$ é aberto em X então, pelo Teorema 2.19, $X - f^{-1}(A)$ é compacto e, pelo Teorema 2.18 $f(X - f^{-1}(A)) = Y - A$ também é compacto. Pelo teorema anterior segue que $Y - A$ é fechado e, portanto, A é aberto em Y . \square

Exemplo 2.3.6: Em $I = [0, 1]$ definamos a relação de equivalência $t \sim t'$ se, e somente se, $t = t'$ ou $t, t' \in \{0, 1\}$. A sobrejeção contínua $\xi : I \rightarrow S^1$, definida por $\xi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, é tal que $t \sim t'$ se, e somente se, $\xi(t) = \xi(t')$. Além disso, I é compacto e S^1 é de Hausdorff. Logo ξ é uma identificação e, pelo Teorema 2.12, $S^1 \cong I / \sim$ via $\bar{f} : I / \sim \rightarrow S^1$, tal que $\bar{f}(\varphi(t)) = \xi(t)$ onde $\varphi : I / \sim \rightarrow I$ é a aplicação quociente.

Exemplo 2.3.7: Generalizando a ideia do exemplo anterior, podemos definir a sobrejeção contínua $\xi : I^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ por $\xi(t,s) = ((\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t)), (\cos(2\pi s), \text{sen}(2\pi s)))$ e teríamos que $\xi(t,s) = \xi(t',s')$ se, e somente se, $(t,s) = (t',s')$ ou $t, t' \in \{0,1\}$ e $s = s'$ ou $t = t'$ e $s, s' \in \{0,1\}$. Esta relação de equivalência sobre I^2 define o toro \mathbb{T}^2 . Logo, por argumentos análogos aos anteriores, temos $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$. Pode-se definir o toro n dimensional \mathbb{T}^n como qualquer espaço homeomorfo a $S^1 \times \dots \times S^1$ (n vezes S^1) com a topologia induzida de \mathbb{R}^{2n} .

Exemplo 2.3.8: Vejamos o toro \mathbb{T}^2 de um ponto de vista geométrico. A aplicação $F : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(\theta, \phi) = ((2 + \cos(2\pi\phi))\cos(2\pi\theta), (2 + \cos(2\pi\phi))\text{sen}(2\pi\theta), \text{sen}(2\pi\phi))$ define a superfície parametrizada $F(I^2) \subset \mathbb{R}^3$, chamada toro de revolução. Se \sim é a relação de equivalência sobre I^2 que define o toro \mathbb{T}^2 , podemos verificar que $(\theta_1, \phi_1) \sim (\theta_2, \phi_2)$ se, e somente se, $F(\theta_1, \phi_1) = F(\theta_2, \phi_2)$ e, como no exemplo anterior, $F(I^2) \cong \mathbb{T}^2$.

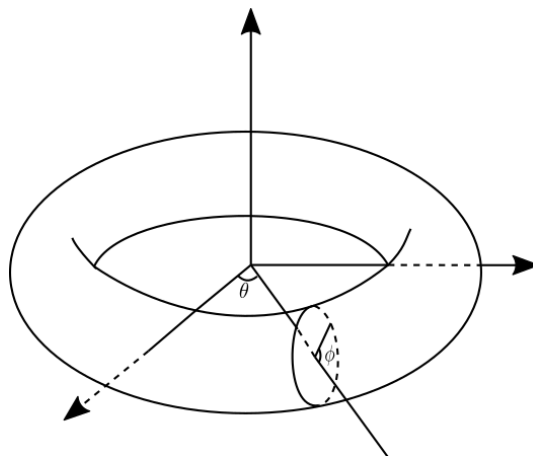


Figura 2.12: Toro de revolução.

Se $f : X \rightarrow Y$ é uma identificação onde X é de Hausdorff, em geral Y não é de Hausdorff. Encerramos esta seção estabelecendo uma condição suficiente para que um espaço quociente seja de Hausdorff.

Teorema 2.24: Seja X um espaço topológico compacto de Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ uma identificação. Se f é fechada, então Y é de Hausdorff (e compacto).

Demonstração. Os pontos de Y são imagem de pontos de X , que são subconjunto fechado em X , portanto os pontos de Y são conjuntos fechados em Y . Sejam y_1 e y_2 dois pontos distintos de Y . Temos que $f^{-1}(y_1)$ e $f^{-1}(y_2)$ são subconjuntos disjuntos e fechados de X . Para cada par de pontos $x \in f^{-1}(y_1)$ e $a \in f^{-1}(y_2)$ existem abertos disjuntos $U_{x,a}$ e $V_{x,a}$ em X , com $x \in U_{x,a}$ e $a \in V_{x,a}$. Uma vez que $f^{-1}(y_2)$ é fechado, é também compacto, donde existe uma subcobertura finita de $\{V_{x,a}; a \in f^{-1}(y_2)\}$, digamos $\{V_{x,a}; a \in A\}$ onde A é um subconjunto finito de $f^{-1}(y_2)$. Em particular, temos abertos disjuntos U_x e V_x tal que $x \in U_x$ e $f^{-1}(y_2) \subset V_x$, de fato, basta tomar $U_x = \bigcap_{a \in A} (U_{x,a})$ e $V_x = \bigcup_{a \in A} (V_{x,a})$. Agora,

sendo $\{U_x; x \in f^{-1}(y_1)\}$ uma cobertura aberta do compacto $f^{-1}(y_1)$, temos uma subcobertura finita $\{U_x; x \in B\}$ onde B é um subconjunto finito de $f^{-1}(y_1)$. Portanto, os conjuntos $U = \bigcup_{x \in B} (U_x)$ e $V = \bigcap_{x \in B} (V_x)$ são abertos disjuntos com $f^{-1}(y_1) \subset U$ e $f^{-1}(y_2) \subset V$. Como f é fechada, temos que $f(X - U)$ e $f(X - V)$ são fechados em Y e, por conseguinte, $W_1 = Y - f(X - U)$ e $W_2 = Y - f(X - V)$ são abertos em Y contendo y_1 e y_2 respectivamente. Finalmente, devemos mostrar que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. De fato, se $y \in W_1 \cap W_2$, então $y \notin f(X - U)$ e $y \notin f(X - V)$, donde $f^{-1}(y) \cap (X - U) = \emptyset$ e $f^{-1}(y) \cap (X - V) = \emptyset$. Logo, $f^{-1}(y) \subset U \cap V = \emptyset$, e $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. \square

Exemplo 2.3.9: O espaço projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é de Hausdorff. De fato, basta observar que a aplicação quociente $\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é fechada.

2.4 Espaços conexos

Intuitivamente, um espaço topológico conexo X é formado por um único “pedaço”. A conexidade é uma propriedade preservada sob homeomorfismos.

Definição 2.21: Um espaço topológico X chama-se conexo quando \emptyset e X são os únicos subconjuntos de X simultaneamente abertos e fechados. Um subconjunto $S \subset X$ diz-se conexo quando, com a topologia induzida de X , S é um espaço conexo.

A existência, num espaço topológico X , de um subconjunto A , aberto e fechado, diferente de X e de \emptyset , é equivalente à existência de uma decomposição $X = A \cup B$, com $A \cap B = \emptyset$, A e B abertos (e, por conseguinte, fechados) e não vazios. Basta tomar $B = X - A$. Logo, X é conexo se, e somente se, não pode ser expresso como reunião de dois subconjuntos abertos, disjuntos e não vazios. Esta formulação evidencia a ideia intuitiva de que um espaço conexo é formado por “um só pedaço”.

Exemplo 2.4.1: Nenhum conjunto $S \subset \mathbb{Q}$ contendo mais de um ponto é conexo. Com efeito, sejam $a < b$ pontos de S . Existe um número irracional ε , tal que $a < \varepsilon < b$. Sejam $A_\varepsilon = \{r \in \mathbb{Q}; r < \varepsilon\}$ e $B_\varepsilon = \{r \in \mathbb{Q}; r > \varepsilon\}$. Temos $\mathbb{Q} = A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$, onde A_ε e B_ε são disjuntos, não vazios e abertos em \mathbb{Q} . Por outro lado, A_ε e B_ε são fechados em \mathbb{Q} pois cada um é o complementar do outro. Logo \mathbb{Q} é desconexo. Quanto a S basta notar que $A_\varepsilon \cap S$ é aberto e fechado em S , não vazio e diferente de S .

Teorema 2.25: Todo intervalo da reta é um espaço conexo.

Demonstração. Seja I um intervalo de extremos a e b (pode ocorrer $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). Seja $S \subset I$ com $S \neq \emptyset$, aberto e fechado em I . Como S é aberto em I podemos tomar um ponto $c \in S$ interior ao intervalo I . Seja $b' = \sup.\{t \in I; [c, t) \subset S\}$. É claro que $c < b'$ e $[c, b') \subset S$ pois, se $x \in [c, b')$ então existe $t \in I$, com $x < t$ e $[c, t) \subset S$, donde $x \in S$. Afirmamos que $b = b'$. Caso contrário teríamos $b' < b$ e daí $b' \in I$. Como S é fechado em I , teríamos $b' \in S$. Mas como S é também aberto em I existiria $\varepsilon > 0$, tal que $[c, b' + \varepsilon) \subset S$ e isso contradiz a definição de b' . Logo, $b = b'$ e $[c, b) \subset S$. Analogamente se mostra

que $(a, c] \subset S$ e, portanto, $(a, b) \subset S$. Como S é fechado em I , o fecho de (a, b) está contido em S . Mas tal fecho é I . Logo, $I = S$. \square

Teorema 2.26: Todo subconjunto conexo da reta é um intervalo.

Demonstração. Com efeito, se um subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ não for um intervalo, existirão $a, b \in S$ e $c \notin S$, tais que $a < c < b$. Segue que $A = (-\infty, c) \cap S$ e $B = (c, +\infty) \cap S$ são abertos em S , disjuntos, não vazios e tais que $S = A \cup B$. Logo, S é desconexo. \square

Teorema 2.27: A imagem de um conjunto conexo $S \subset X$ por uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é um conjunto conexo $f(S) \subset Y$.

Demonstração. Como ser conexo é uma propriedade intrínseca do espaço S , basta considerar o caso em que $S = X$, $f(S) = Y$ e que f é uma aplicação contínua do conexo X sobre Y . Se $U \subset Y$ é aberto e fechado então, pela continuidade de f , $f^{-1}(U)$ é aberto e fechado em X . Como X é conexo, $f^{-1}(U) = X$ ou $f^{-1}(U) = \emptyset$, donde $U = Y$ ou $U = \emptyset$. \square

Corolário 2.3: Sejam X e Y espaços topológicos homeomorfos. Então X é conexo se, e somente se, Y é conexo.

Corolário 2.4: Sejam X um espaço topológico conexo e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua. Então $f(X)$ é um intervalo.

Demonstração. Segue do Teorema anterior e do Teorema 2.26. \square

O corolário seguinte é o conhecido Teorema do Valor Intermediário.

Corolário 2.5: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua definida no intervalo $[a, b]$. Se $f(a) < c < f(b)$, então existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.

Demonstração. Com efeito, $[a, b]$ é conexo, logo $f([a, b])$ é um intervalo. Como $f(a) < c < f(b)$, segue que c pertence ao intervalo $f([a, b])$. \square

Teorema 2.28: Seja $\{Y_\lambda; \lambda \in L\}$ uma família de subconjuntos conexos de um espaço X . Se $\bigcap_{\lambda \in L} (Y_\lambda) \neq \emptyset$ então $Y = \bigcup_{\lambda \in L} (Y_\lambda)$ é conexo.

Demonstração. Seja U um subconjunto não-vazio, aberto e fechado em Y . Então $U \cap Y_{\lambda_0} \neq \emptyset$ para algum $\lambda_0 \in L$. Como $U \cap Y_{\lambda_0}$ é aberto e fechado em Y_{λ_0} , e Y_{λ_0} é conexo, segue que $U \cap Y_{\lambda_0} = Y_{\lambda_0}$, donde $Y_{\lambda_0} \subset U$. Ora, Y_{λ_0} tem um ponto em comum com cada um dos outros Y_λ e, portanto, $U \cap Y_\lambda \neq \emptyset$ para todo $\lambda \in L$. Repetindo-se o argumento anterior, obtemos que $Y \subset U$. Logo, $U = Y$ e Y é conexo. \square

Teorema 2.29: Sejam X e Y espaços topológicos. Então X e Y são conexos se, e somente se, $X \times Y$ é conexo.

Demonstração. Se $X \times Y$ é conexo então as projeções $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ nos asseguram que X e Y são conexos. Agora, suponhamos que X e Y sejam conexos. Como $X \times \{y\} \cong X$ e $\{x\} \times Y \cong Y$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, temos que $X \times \{y\}$ e $\{x\} \times Y$ são conexos. Como $(X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x,y)\} \neq \emptyset$ segue, pelo teorema anterior, que $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ é conexo. Fixando $y_0 \in Y$, podemos escrever $X \times Y = \bigcup_{x \in X} ((X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y))$ e, como $\bigcap_{x \in X} ((X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y)) \neq \emptyset$, temos, novamente pelo teorema anterior, que $X \times Y$ é conexo. \square

Exemplo 2.4.2: O toro, a faixa de Möebius e a garrafa de Klein são espaços conexos uma vez que cada um é imagem de um quadrado I^2 por uma aplicação quociente.

Introduziremos agora um tipo importante, embora mais restrito, de espaço conexo.

Definição 2.22: Seja X um espaço topológico.

1. Um caminho em X é uma aplicação contínua $f : I \rightarrow X$, onde $I = [0, 1]$. O ponto $a = f(0)$ é o ponto inicial e $b = f(1)$ é o ponto final do caminho.
2. X diz-se conexo por caminhos quando, dados dois pontos quaisquer $a, b \in X$, existe um caminho $f : I \rightarrow X$ com $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

Teorema 2.30: Todo espaço topológico conexo por caminhos é conexo.

Demonstração. Seja X um espaço topológico conexo por caminhos e suponhamos, por absurdo, que exista um subconjunto $A \subset X$, aberto e fechado, com $A \neq X$ e $A \neq \emptyset$. Tomando pontos $a \in A$ e $b \in X - A$, existiria um caminho $f : I \rightarrow X$ com $f(0) = a$ e $f(1) = b$. O conjunto $A \cap f(I)$ seria aberto e fechado em $f(I)$, diferente de $f(I)$, pois $b \notin A$ e não vazio pois $a \in A \cap f(I)$. Isto contradiz que $f(I)$ seja conexo. \square

Exemplo 2.4.3: A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\| = 1\}$ é conexa. Basta mostrar S^n é conexa por caminhos. Dados $a \neq b$ em S^n suponhamos, primeiro, que a e b não são antípodas, isto é, $a \neq -b$. Então $(1-t)a + tb \neq 0$, para todo $0 \leq t \leq 1$ e podemos definir o caminho

$$f(t) = \frac{(1-t)a + tb}{\|(1-t)a + tb\|}.$$

Se $a = -b$, tomamos um ponto $c \in S^n - \{a, b\}$ que não é antípoda de a nem de b , caminhos $f, g : I \rightarrow S^n$, tais que $f(0) = a$, $f(1) = c$, $g(0) = c$, $g(1) = b$ e definimos o caminho

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.4.4: O espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ é conexo pois é imagem de S^n pela identificação $\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$.

Variedades Bidimensionais

O conceito de variedade bidimensional ou superfície, corresponde à abstração matemática do conceito familiar de uma superfície feita de papel, metal, plástico ou qualquer outro material, desde que a espessura seja desprezível. Uma superfície tem as mesmas propriedades locais do plano euclidiano \mathbb{R}^2 . Um pequeno objeto que se desloca sobre uma superfície não é capaz de distinguir esta do plano euclidiano.

O estudo das variedades possui várias motivações e tem aplicações em outras áreas da Matemática além da Topologia. Em particular, as variedades bidimensionais admitem um teorema de classificação que nos permite obter todos os tipos possíveis de superfícies compactas. Além disso, existem invariantes simples associados a esses espaços topológicos que nos permitem decidir se dois desses espaços são ou não homeomorfos. Apresentar o teorema de classificação e sua demonstração, bem como um invariante topológico clássico, é o objetivo deste capítulo.

3.1 Definição e exemplos de variedades n -dimensionais

Definição 3.1: Seja n um número inteiro positivo. Uma variedade n -dimensional é um espaço topológico de Hausdorff tal que cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa à bola aberta n -dimensional $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$.

Exemplo 3.1.1: O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é claramente uma variedade n -dimensional. A esfera unitária $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ é uma variedade n -dimensional pois, para cada ponto $x \in S^n$, a vizinhança $S^n - \{-x\}$ é homeomorfa a \mathbb{R}^n pela projeção estereográfica e \mathbb{R}^n é homeomorfa a bola aberta $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$.

Exemplo 3.1.2: Se M é uma variedade n -dimensional, então qualquer aberto de M também é uma variedade n -dimensional.

Exemplo 3.1.3: Se M é uma variedade m -dimensional e N é uma variedade n -dimensional, então o espaço produto $M \times N$ é uma variedade $(m + n)$ -dimensional. A demonstração segue do fato de que o produto de dois espaços de Hausdorff é um espaço de Hausdorff e $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$.

Exemplo 3.1.4: O toro \mathbb{T}^n é uma variedade n -dimensional uma vez que pode ser

definido como o produto $S^1 \times \cdots \times S^1$ de n esferas S^1 .

Exemplo 3.1.5: No quadrado unitário sem os lados horizontais, isto é, $X = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ podemos definir relações de equivalência análogas às dos Exemplos 2.2.13 e 2.2.14 para obter o cilindro e a faixa de Möebius, que são variedades bidimensionais. Observe que a omissão dos bordos nestes exemplos é necessária para que cada ponto tenha uma vizinhança homeomorfa a um disco aberto.

Exemplo 3.1.6: O espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é uma variedade n -dimensional. Com efeito, a identificação $\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é uma aplicação fechada, donde $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ é de Hausdorff (Teorema 2.24). Se $x \in S^n$, então x está em algum dos hemisférios abertos (norte, sul, leste ou oeste) de S^n , digamos no hemisfério norte $H = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} > 0\}$. Como φ também é uma aplicação aberta, segue que $\varphi(H)$ é uma vizinhança aberta de $\varphi(x) = \{x, -x\}$ homeomorfa à bola B^n , pois $\varphi|_H : H \rightarrow \varphi(H)$ é bijetiva e $H \cong B^n$.

Uma variedade n -dimensional pode ser compacta ou não compacta, conexa ou não conexa, mas é sempre localmente compacta e conexa.

A condição de que seja um espaço de Hausdorff é indispensável na definição de variedade. Existem espaços que não são de Hausdorff nos quais cada ponto admite uma vizinhança homeomorfa a bola aberta B^n . Como um exemplo simples desta afirmação, considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 1\}$ com a topologia definida pelos abertos básicos (a, b) e $(c, 0) \cup (d, 1]$ com $-1 \leq a < b \leq 1$, $-1 \leq c < 0$ e $-1 \leq d < 1$ mais o conjunto vazio. Note que X não é de Hausdorff pois toda vizinhança de 1, contendo algum conjunto da forma $(c, 0) \cup (d, 1]$, $c < 0$, tem interseção não vazia com qualquer vizinhança de 0. Qualquer ponto $x \neq 1$ em X claramente tem uma vizinhança homeomorfa ao intervalo $(-1, 1)$. Se $x = 1$, tomemos a vizinhança $V = (-1/2, 0) \cup (1/2, 1]$ e definimos um homeomorfismo $f : V \rightarrow (-1, 1)$ pondo

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } -1/2 < x < 0 \\ 1 - x, & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

A propósito das considerações anteriores, a menos de um homeomorfismo, o círculo S^1 é a única variedade unidimensional compacta e conexa, uma prova deste fato pode ser encontrada em [1]. Concentremo-nos agora nas variedades bidimensionais compactas e conexas ou, simplesmente, superfícies.

3.2 Orientação de Superfícies

As superfícies conexas podem ser divididas em dois tipos: orientáveis e não-orientáveis. Essas propriedades são determinantes em vista dos objetivos de classificar as superfícies.

Há várias maneiras de se escolher uma orientação para o plano \mathbb{R}^2 ou, mais geralmente, para uma pequena região do plano. Por exemplo, podemos definir qual, dentre os dois possíveis sistemas de coordenadas cartesianas, satisfaz a regra da mão direita. Podemos ainda definir um sentido positivo de rotação em torno de um ponto

do plano. Se a partir de um dado ponto do plano definirmos uma orientação, um objeto bidimensional que parte deste ponto e está submetido a esta orientação, após se mover ao longo do plano e retornar ao ponto inicial, terá orientação concordante com a inicial.

Considerações similares se aplicam a qualquer superfície, uma vez que são localmente homeomorfas ao plano. No caso do plano, o objeto retorna ao ponto inicial com a mesma orientação. Pode ocorrer, entretanto, que após um certo percurso ao longo de uma superfície, o objeto bidimensional retorne ao ponto inicial com sua orientação invertida. A superfície mais simples que apresenta esta propriedade é a faixa de Möebius, como ilustra a Figura 3.1.

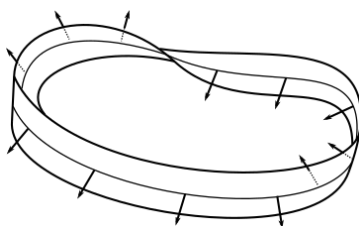


Figura 3.1: A faixa de Möebius é não-orientável.

Observe que após percorrer uma vez a linha central sobre a faixa de Möebius, o objeto volta para o ponto inicial com a orientação invertida. Dizemos que a linha central na faixa de Möebius é um caminho fechado que inverte a orientação. Se um caminho fechado é tal que, após percorrido uma vez, o objeto volta à posição inicial com a mesma orientação, dizemos que o caminho preserva a orientação.

Se todo caminho fechado em uma superfície S preserva orientação, a superfície é dita orientável. Se, por outro lado, existe algum caminho fechado em S que inverte a orientação, dizemos que a superfície é não-orientável. Equivalentemente, podemos dizer que S é não-orientável se possui algum subespaço homeomorfo a faixa de Möebius.

3.3 Somas Conexas

A esfera S^2 , o toro T^2 e o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ são três exemplos de superfícies. Como veremos, qualquer superfície compacta pode ser obtida dessas três através de somas conexas, o que leva ao conhecido Teorema de Classificação das Superfícies.

Dadas duas superfícies disjuntas S_1 e S_2 sua soma conexa $S_1 \# S_2$ é obtida retirando-se um pequeno disco aberto de cada uma e então colando-as ao longo dos bordos resultantes. A soma conexa de dois toros (Figura 3.2) chama-se bitoro.

Mais precisamente, temos:

Definição 3.2: Sejam S_1 e S_2 duas superfícies e escolha discos $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$ homeomorfos ao disco plano fechado $D = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq 1\}$. Seja $h : D_1 \rightarrow D_2$ um homeomorfismo. A soma conexa de S_1 e S_2 é o espaço quociente

$$S_1 \# S_2 = \frac{(S_1 - \text{int}(D_1)) \cup (S_2 - \text{int}(D_2))}{\sim}$$

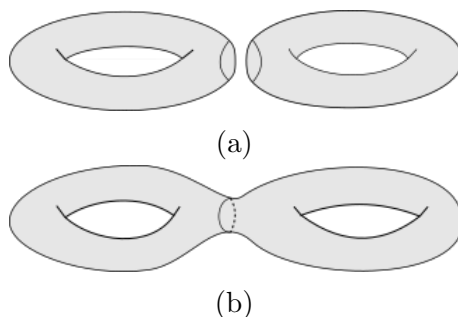


Figura 3.2: Soma conexa de dois toros

onde $x \sim h(x)$ para todo x pertencente ao bordo $\partial(S_1 - \text{int}(D_1)) = \partial(D_1)$ de D_1 .

Observações:

1. Se S_1 e S_2 são superfícies, então sua soma conexa $S_1 \# S_2$ é uma superfície. Esse fato é intuitivamente claro e pode ser facilmente demonstrado.
2. É possível mostrar que a definição de soma conexa não depende da escolha dos discos D_1 e D_2 nem de qual homeomorfismo é tomado entre eles.

Exemplo 3.3.1: A soma conexa $S \# S^2$, de uma superfície qualquer S com a esfera bidimensional S^2 , é homeomorfa a S . Isso é facilmente visto quando retiramos da esfera um hemisfério aberto, o qual é homeomorfo ao disco plano aberto, e colamos no buraco da superfície S o hemisfério fechado remanescente.

O exemplo anterior mostra que a esfera é uma espécie de “elemento neutro” na soma conexa. Pela definição, também podemos verificar facilmente que a soma conexa é associativa e comutativa.

Exemplo 3.3.2: A soma conexa $\mathbb{R}P \# \mathbb{R}P$ de dois planos projetivos é homeomorfa a garrafa de Klein \mathbb{K} . Para ver isso, comecemos observando que se retirarmos um disco aberto no plano projetivo, conforme a Figura 3.3, obtemos um espaço homeomorfo à faixa de Möebius. Assim, $\mathbb{R}P \# \mathbb{R}P$ poderia ser obtida colando duas faixas de Möebius ao longo de seus bordos. Por outro lado, a Figura 3.4 mostra como obter duas faixas de Möebius a partir de uma garrafa de Klein. Os cortes ao longo de AB' e BA' , sob as identificações, tornam-se círculos, bordo de cada faixa. Assim, a identificação de duas faixas Möebius ao longo dos bordos resulta em uma garrafa de Klein.

É intuitivamente claro que se S_1 e S_2 são superfícies orientáveis, então sua soma conexa $S_1 \# S_2$ ainda é orientável. Por outro lado, se S_1 ou S_2 é não-orientável, então $S_1 \# S_2$ é não orientável. Complementando a discussão do parágrafo anterior, isso explica que uma superfície não-orientável não tem um “elemento inverso” na soma conexa, o que impede o conjunto das classes de homeomorfismo das superfícies ter uma estrutura de grupo.

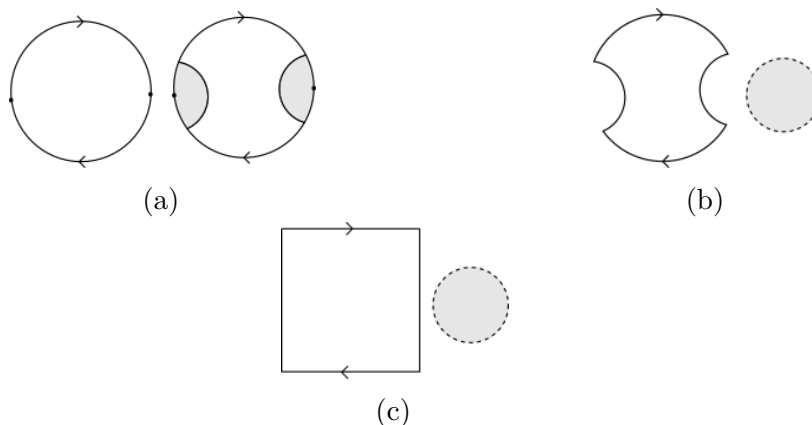


Figura 3.3: O Plano projetivo menos um disco aberto é homeomorfo a faixa de Möbius.

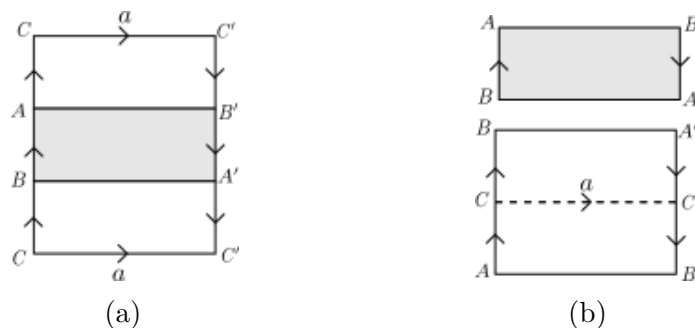


Figura 3.4: Podemos obter duas faixas de Möbius a partir da garrafa de Klein.

3.4 O Teorema de Classificação das Superfícies Compactas

Na seção anterior discutimos como construir novas superfícies a partir da soma conexa de esferas, toros e planos projetivos. Como mencionado, vejamos o que afirma o teorema que é a principal motivação da definição de somas conexas.

Teorema 3.1: (Classificação das Superfícies Compactas) Toda superfície compacta é homeomorfa a esfera, ou a uma soma conexa de toros, ou a uma soma conexa de planos projetivos.

Como preparação para a demonstração, descreveremos uma “forma canônica” de se expressar a soma conexa de toros e de planos projetivos. Se tomarmos os toros T_1 e T_2 como espaços quocientes obtidos de quadrados, sua soma conexa $T_1 \# T_2$ é o espaço quociente obtido de um octógono, conforme a Figura 3.5.

Somando ao espaço quociente anterior (bitoro) um novo toro, obtemos a soma conexa de três toros (tritoro), conforme a Figura 3.6.

Neste ponto, é conveniente introduzir uma notação que nos diz quais e como cada par de arestas de um polígono são identificadas: a partir de um dado vértice percorremos o polígono no sentido horário anotando, sucessivamente, as letras que

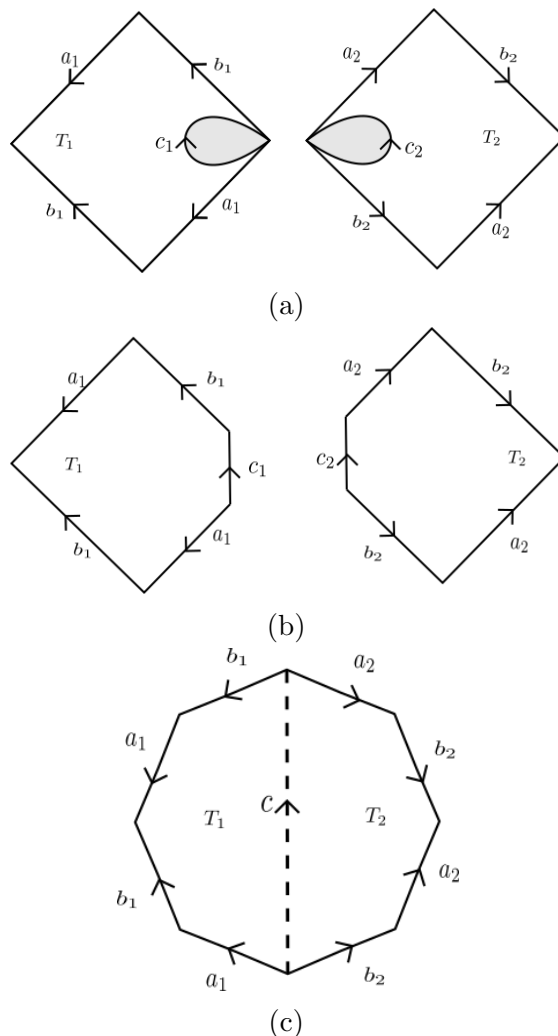


Figura 3.5: Soma conexa de dois toros

denotam as arestas, se a seta de uma dada aresta aponta no sentido horário, então a letra não recebe expoente, se a seta aponta no sentido anti-horário, então a letra recebe o expoente -1 . Por exemplo, o polígono da Figura 3.6b pode ser representado por $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1}$. Agora, fazendo uso da notação, é fácil provar por indução que a soma conexa de n toros pode ser escrita como o espaço quociente obtido de um polígono de $4n$ lados, detonado por $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$.

Com argumentos totalmente análogos podemos exibir a forma canônica para a soma conexa de planos projetivos. De fato, se tomarmos os planos projetivos P_1 e P_2 como espaço quociente de círculos disjuntos, sua soma conexa $P_1 \# P_2$ pode ser escrita como o espaço quociente obtido de um quadrilátero, conforme a Figura 3.7. Tomando a soma conexa do espaço resultante com um novo plano projetivo, obtemos a soma conexa de três planos projetivos, hexágono da Figura 3.8 cuja notação é $a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 a_3$. Por indução podemos provar que a soma conexa de n planos projetivos é um polígono de $2n$ lados que pode ser denotado por $a_1 a_1 \cdots a_n a_n$.

A esfera S^2 , como sabemos, pode ser tomada como o espaço quociente obtido de um círculo (Figura 3.9) e não é necessário considerar a soma conexa de n esferas, $n > 1$, pois teríamos uma superfície homeomorfa a própria esfera (Exemplo 3.3.1).

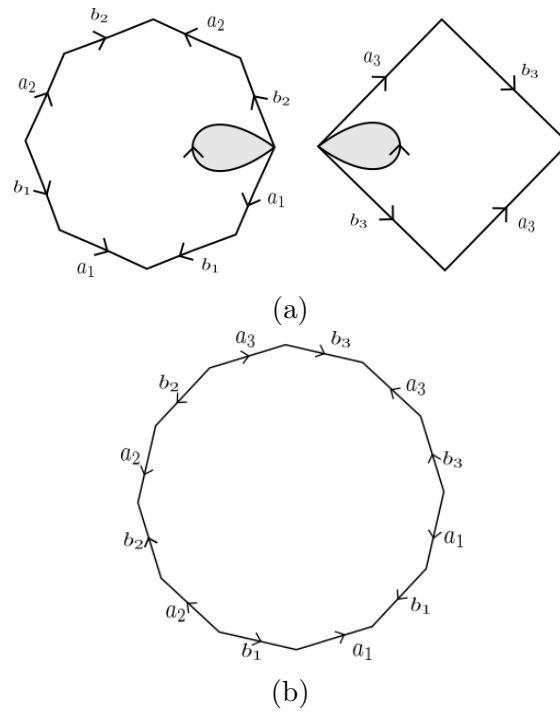


Figura 3.6: Soma conexa de três toros

Em suma, podemos escrever a forma canônica para cada uma das superfícies mencionadas no Teorema 3.1 como segue:

1. A esfera: aa^{-1} .
2. Soma conexa de n toros: $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$.
3. Soma conexa de n planos projetivos: $a_1a_1a_2a_2 \cdots a_na_n$.

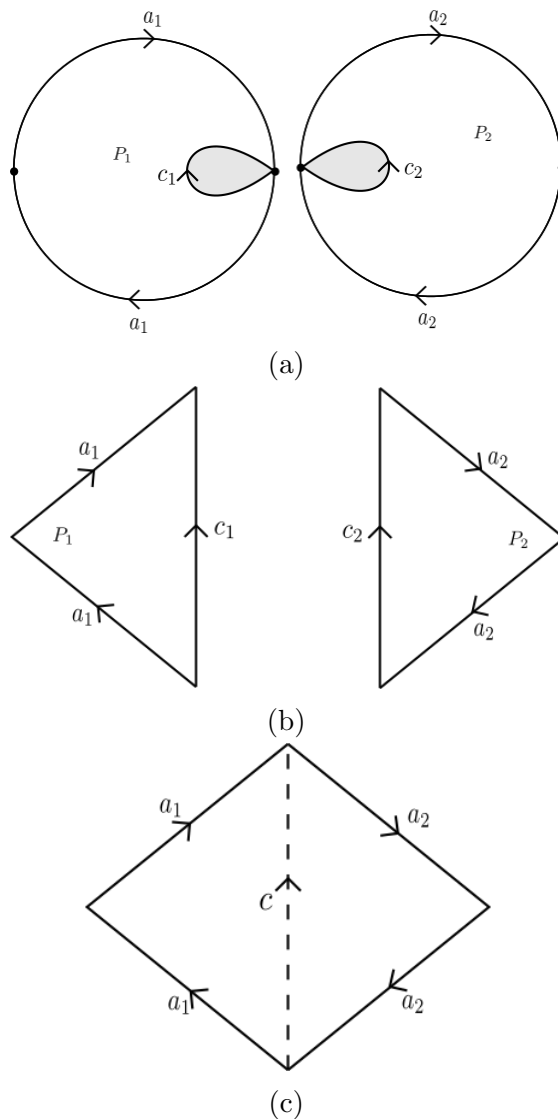


Figura 3.7: Soma conexa de dois planos projetivos.

3.4.1 Triangulação de Superfícies Compactas

Para provar o Teorema de Classificação devemos assumir que as superfícies do enunciado são trianguláveis, isto é, podem ser decompostas em “triângulos” dispostos de um maneira particular. Precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 3.3: Uma triangulação de uma superfície compacta S é uma família finita de conjuntos fechados $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ que cobre S , juntamente com uma família de homeomorfismos $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$, com $i = 1, \dots, n$, onde cada T'_i é um triângulo ordinário de \mathbb{R}^2 . Os conjuntos T_i são chamados “triângulos”. Os subconjuntos de T_i que são imagens das arestas e dos vértices do triângulo T'_i pelo homeomorfismo φ_i são também chamados “arestas” e “vértices” de T'_i , respectivamente. Finalmente, é requerido que quaisquer dois triângulos T_i e T_j sejam, ou disjuntos, ou tem um único vértice em comum ou tem uma aresta inteira em comum.

Dada uma superfície compacta S existe sempre uma triangulação de S . Este fato,

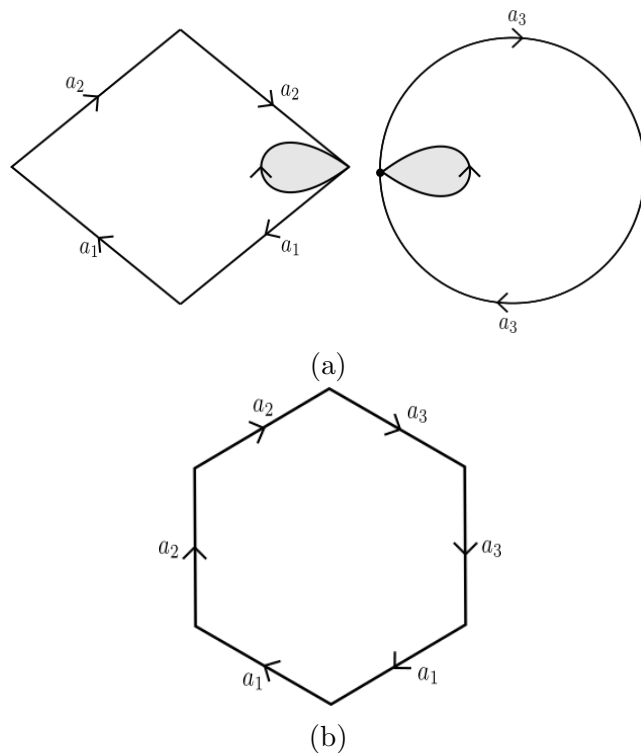


Figura 3.8: Soma conexa de três planos projetivos.

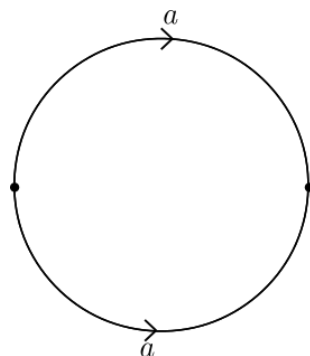


Figura 3.9: Esfera como espaço quociente.

um tanto intuitivo, teve sua primeira demonstração dada por T. Radó em 1925, mas não nos deteremos à tal prova. Da definição, temos que dois triângulos distintos não podem ter os mesmos vértices, portanto podemos determinar completamente uma triangulação enumerando os vértices e identificando cada triângulo por um terno não ordenado de números.

Exemplo 3.4.1: Um tetraedro ordinário no espaço \mathbb{R}^3 é homeomorfo a esfera S^2 . Seus quatro triângulos satisfazem todas as condições da Definição 3.3 e, além disso, quaisquer três dos quatro vértices são vértices de algum triângulo. Nenhuma outra triangulação da esfera ou de qualquer superfície tem essa propriedade.

Exemplo 3.4.2: Uma triangulação do plano projetivo é mostrada na Figura 3.11. Os vértices são numerados de 1 a 6 e os 10 triângulos obtidos são: 124, 235, 156, 236, 134, 245, 135, 126, 346 e 456.

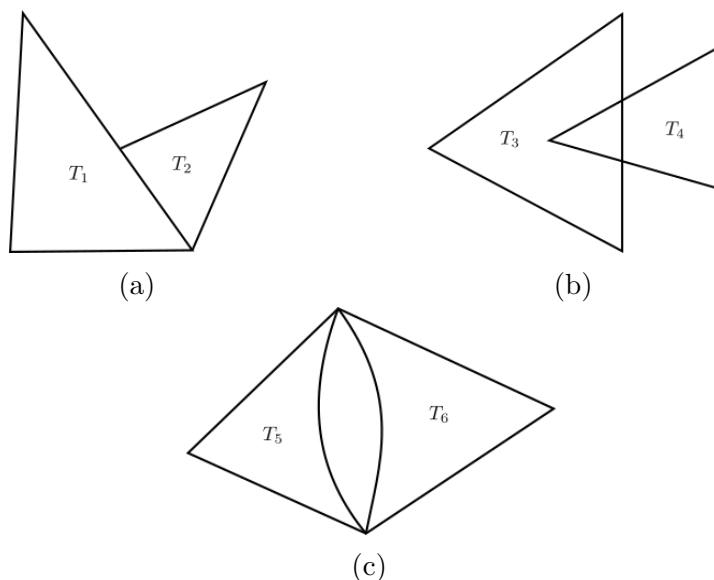


Figura 3.10: Alguns tipos de interseções não permitidas numa triangulação.

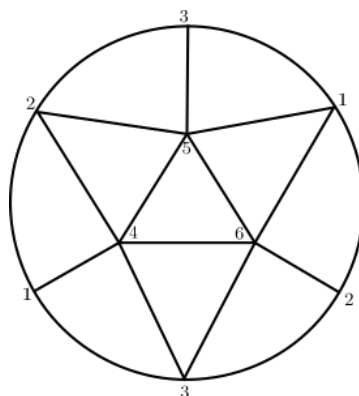


Figura 3.11: Uma triangulação do plano projetivo.

Exemplo 3.4.3: Uma triangulação do toro é mostrada na Figura 3.12. Os vértices são enumerados de 1 a 9 e os 18 triângulos obtidos são: 124, 356, 457, 689, 187, 239, 245, 361, 578, 649, 128, 379, 235, 146, 658, 479, 289 e 137.

Qualquer triangulação de uma superfície compacta satisfaz duas condições que nos serão úteis para certas argumentações futuras:

1. Cada aresta de uma triangulação é aresta de exatamente dois triângulos.
2. Seja v um vértice de uma triangulação. Podemos enumerar todos os triângulos contendo v como vértice em um ciclo $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n, T_0$, tal que, T_i e T_{i+1} tem uma aresta em comum para $0 \leq i \leq n - 1$.

Daremos apenas uma ideia da prova de tais propriedades. A primeira condição segue do fato de que cada ponto de uma aresta possui uma vizinhança homeomorfa a um disco aberto. Se uma aresta pertencesse a um único triângulo ou mais de dois triângulos, isso não seria possível. Agora, da condição 1, segue que é possível dispor

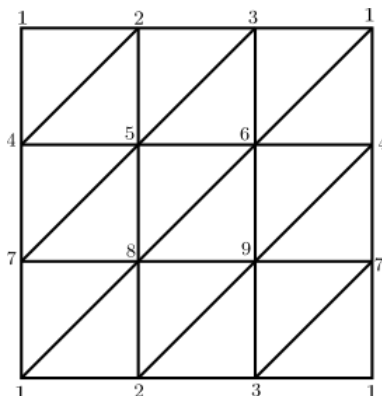


Figura 3.12: Uma triangulação do toro.

os triângulos contendo v como vértices em vários ciclos, conforme 2, que são disjuntos exceto pelo ponto v . Entretanto, se houvesse mais do que um ciclo, seria violada a condição de que v tem uma vizinhança homeomorfa a um disco aberto.

3.4.2 Demonstração do Teorema de Classificação das Superfícies Compactas

Seja S uma superfície compacta. Vamos demonstrar o Teorema 3.1 mostrando que S é homeomorfa a um polígono cujos lados são identificados em pares conforme um dos símbolos apresentados no final da introdução à Seção 3.4.

Primeiro Passo: Expressando S como espaço quociente de um polígono.

Da discussão anterior, suponhamos dada uma triangulação de S onde n denota o número de triângulos. Afirmamos que podemos enumerar os triângulos T_1, T_2, \dots, T_n de modo que T_i tenha uma aresta a_i em comum com algum dos triângulos T_1, \dots, T_{i-1} , $i = 2, \dots, n$. Com efeito, denote qualquer triângulo por T_1 . Para ser T_2 escolha qualquer triângulo com uma aresta em comum com T_1 . Em seguida, escolha T_3 como qualquer triângulo com uma aresta em comum com T_1 ou com T_2 . Se em alguma etapa não pudéssemos continuar esse procedimento, então teríamos dois conjuntos de triângulos $\{T_1, \dots, T_k\}$ e $\{T_{k+1}, \dots, T_n\}$ tal que nenhum triângulo do primeiro conjunto teria uma aresta ou um vértice em comum com algum triângulo do segundo conjunto. Ora, isso nos dá uma partição de S em dois conjuntos fechados não vazios, o que contraria o fato de S ser compacto.

Usaremos a enumeração T_1, \dots, T_n dos triângulos, junto com a escolha das arestas a_2, \dots, a_n , para construir um polígono cujos lados são identificados em pares para obter S . Para cada triângulo $T_i \subset S$, temos um triângulo ordinário $T'_i \subset \mathbb{R}^2$ e um homeomorfismo $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$. Podemos supor que os triângulos T'_1, \dots, T'_n sejam dois a dois disjuntos (basta aplicar uma translação em alguns deles, se necessário). Seja

$$T' = \cup_{i=1}^n T'_i.$$

Então T' é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 . Definamos a aplicação $\varphi : T' \rightarrow S$ pondo $\varphi|_{T'_i} = \varphi_i$. É claro que φ é contínua e sobrejetiva. Como T' é compacto e S

é de Hausdorff, segue do Teorema 2.23 que S tem a topologia quociente relativa a φ . Agora, observemos que, se definirmos sobre T' a relação de equivalência \sim_φ pondo $x \sim_\varphi y$ se, e somente se, $\varphi(x) = \varphi(y)$ temos, pelo Teorema 2.12, que o espaço quociente T'/\sim_φ é homeomorfo a S .

Vamos inicialmente restringir a relação \sim_φ a algumas arestas dos triângulos de T' de modo a obtermos um polígono e, posteriormente, identificaremos pares de arestas do polígono para obter S (isso é permitido pelo Teorema 2.13). Cada aresta a_i , com $2 \leq i \leq n$ é aresta de um triângulo T_i e de um outro triângulo T_j , $1 \leq j < i$. Portanto $\varphi^{-1}(a_i)$ é formado por uma aresta de T'_i e uma aresta de T'_j , com $T'_i, T'_j \in T'$. Assim, restringindo a relação \sim_φ aos pares de arestas $\varphi^{-1}(a_i)$, $2 \leq i \leq n$, obtemos um espaço P , homeomorfo à um polígono (ou disco). A demonstração dessa última afirmação depende de dois fatos:

1. Sejam D_1 e D_2 conjuntos homeomorfos ao disco $D = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq 1\}$ e J_1 e J_2 subconjuntos dos bordos de D_1 e D_2 , respectivamente, homeomorfos ao intervalo $I = [0,1]$. Tomando um homeomorfismo $h : J_1 \rightarrow J_2$, definamos em $D_1 \cup D_2$ a relação \sim , tal que $x \sim y$ se, e somente se, $h(x) = h(y)$. O espaço quociente $(D_1 \cup D_2)/\sim$ continua homeomorfo ao disco D . Intuitivamente, este procedimento consiste em colar os discos D_1 e D_2 ao longo de um segmento comum de seus bordos, o resultado é ainda um disco.
2. Ao construir o polígono P identificando os pares de arestas $\varphi^{-1}(a_i)$, $2 \leq i \leq n$, podemos fazê-lo de uma vez ou primeiro identificar as arestas $\varphi^{-1}(a_2)$ em seguida as arestas $\varphi^{-1}(a_3)$ e assim por diante. Isso segue do Teorema 2.13.

Agora, como T'_1 e T'_2 são homeomorfos a discos, o espaço quociente $T'_1 \cup T'_2/\sim_\varphi$ é homeomorfo a um disco pelo item 1 acima. Tomando $T'_1 \cup T'_2/\sim_\varphi$ e T'_3 e identificando as arestas $\varphi^{-1}(a_3)$, sob a relação \sim_φ , obtemos um novo disco. Continuamos esse processo até formar um polígono (que é homeomorfo ao disco) formado pelos triângulos T'_i , $1 \leq i \leq n$. O item 2 acima nos garante que, de fato, a restrição de \sim_φ às arestas $\varphi^{-1}(a_i)$, $2 \leq i \leq n$, nos leva a tal polígono. A Figura 3.13 mostra o procedimento anterior aplicado à superfície de um cubo.

Neste ponto, podemos desconsiderar as arestas a_i e representar o polígono P como mostra a Figura 3.14.

Como já mencionado, após identificar as arestas, obtemos uma superfície homeomorfa à superfície S (o cubo, no caso acima). Interessa-nos, a partir de agora, ver que formas esse polígono pode assumir.

Segundo Passo: Eliminando pares de arestas adjacentes do primeiro tipo.

No passo anterior, vimos como representar a superfície S como o espaço quociente obtido de um polígono P . Conforme a introdução da Seção 3.4, podemos representar esse polígono por um símbolo conveniente. O polígono da Figura 3.14, por exemplo, pode ser denotado por $aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e$.

Se no par de letras que denota um par de arestas uma não possui expoente e a outra possui o expoente -1 , diremos que este é um par de arestas do primeiro tipo. Caso ambas as letras não possuem expoentes ou possuem o expoente -1 , este é um

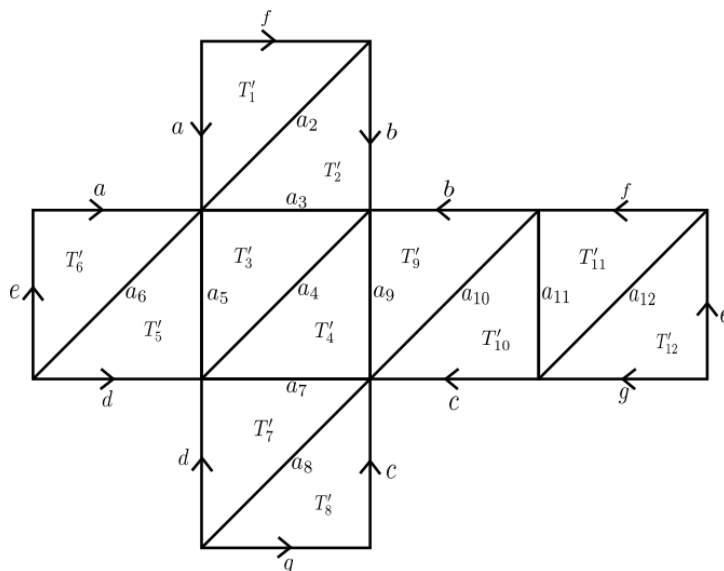


Figura 3.13: Primeiro passo da demonstração para um cubo.

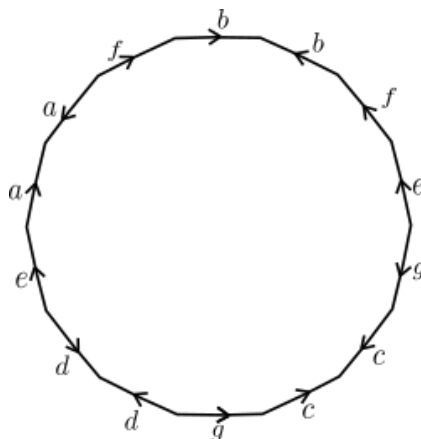


Figura 3.14: Polígono obtido pela aplicação do primeiro passo em um cubo.

par de arestas do segundo tipo. No exemplo acima todos os pares de arestas são do primeiro tipo.

Gostaríamos de mostrar que é possível eliminar os pares de arestas adjacentes do primeiro tipo, dado que o polígono possui pelo menos quatro arestas. Isso pode ser visto a partir da sequência de figuras mostrada em 3.15. Note que se o polígono P possui n arestas, ele é transformado num polígono com $n - 2$ arestas quando o primeiro passo é aplicado uma vez.

O procedimento pode ser repetido até que todos os pares em questão sejam eliminados, ou até obtermos um “polígono de dois lados”. No último caso, o símbolo obtido seria da forma aa ou aa^{-1} , representando uma esfera ou um plano projetivo, e o teorema estaria provado. Caso contrário, passamos ao seguinte procedimento.

Terceiro Passo: Transformação em um polígono tal que todos os vértices estão em uma mesma classe de equivalência.

Embora as arestas do polígono P devam ser identificadas aos pares, os vértices

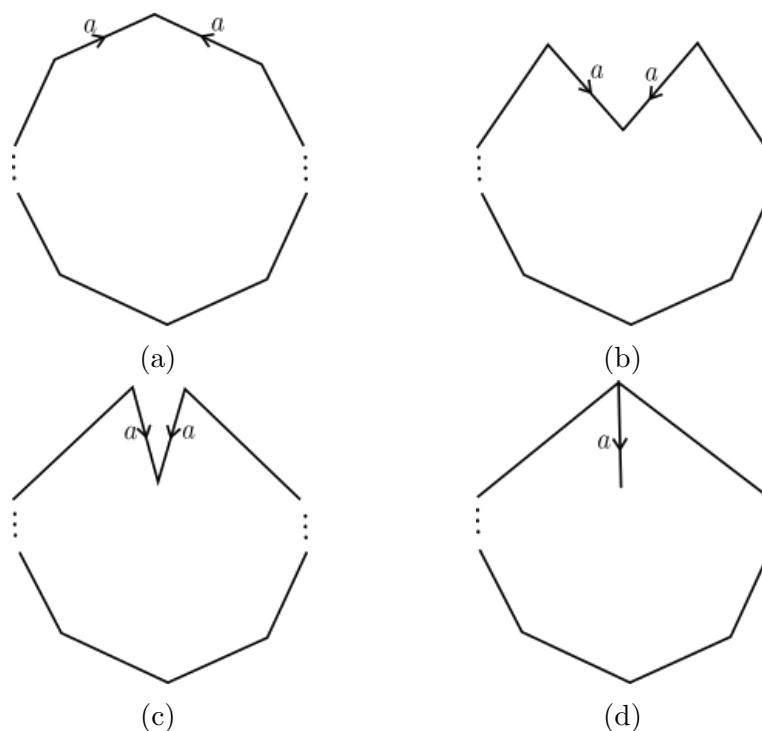


Figura 3.15: Eliminação de pares de arestas adjacentes do primeiro tipo.

podem ser identificados em conjuntos de um, dois, três, quatro e assim por diante. No polígono da Figura 3.14, por exemplo, as arestas se distribuem em oito classes de equivalência contendo um, dois ou três vértices cada.

Suponhamos que o segundo passo tenha sido realizado tanto quanto possível no polígono P . Desejamos mostrar que este pode ser transformado num polígono equivalente, em que todos os vértices estão na mesma classe de equivalência.

Assumamos que exista pelo menos duas classes de equivalência de vértices distintas. Então, o polígono P deve ter um par de vértices adjacentes não equivalentes. Denotemos por R e S tais vértices (Figura 3.16a). Como o segundo passo foi executado tanto quanto possível e R e S não são equivalentes, segue que as arestas a e b não devem ser identificadas. Denotando por Q a outra aresta adjacente à R , fazemos um corte c , da aresta Q até a aresta S . Agora, identifiquemos o par de arestas denotados por a . O resultado é um polígono com um vértice a menos na classe de equivalência do vértice R e um vértice a mais na classe do vértice S (Figura 3.16b).

Se possível, realizemos o segundo passo da demonstração novamente. Então, fazemos mais uma vez o passo três para diminuir os vértices da classe de equivalência de R . Alternando os passos anteriores, tanto quanto possível, obtemos um polígono onde a classe de equivalência de R é completamente eliminada e a classe de S ganha a quantidade de vértices que havia na classe de R . Esse procedimento, claramente, termina com um polígono cuja única classe de equivalência dos vértices é representada por S .

Quarto Passo: Tornando cada par de arestas do segundo tipo adjacentes.

Desejamos mostrar que o polígono P pode ser transformado, se necessário, de

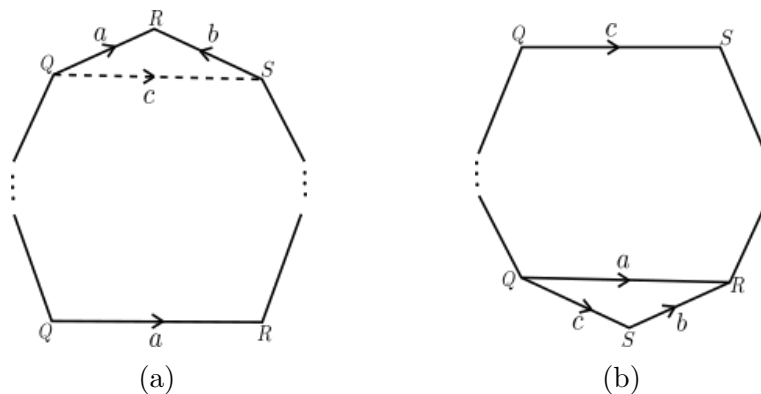


Figura 3.16: Reduzindo a classe do R e aumentando a classe do S.

modo que qualquer par de arestas do segundo tipo sejam adjacentes. Suponhamos que exista um par de arestas do segundo tipo, denotadas por b , não adjacentes, e sejam M e N os vértices de b (Figura 3.17a). Fazemos um corte a ligando o par de vértices denotados por N e identifiquemos os lados denotados por b . O novo polígono possui o par de arestas do segundo tipo, denotadas por a , adjacentes, conforme a Figura 3.17b.

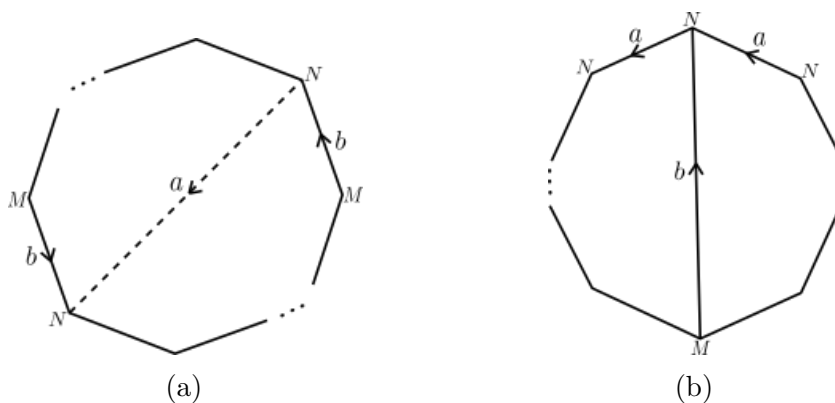


Figura 3.17: Tornando arestas do segundo tipo adjacentes.

Repetimos esse procedimento até que todos os pares de arestas do segundo tipo sejam adjacentes. Se não houver pares de arestas do primeiro tipo, então encerramos nossa demonstração, pois teremos um polígono da forma $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$ e a superfície S é uma soma conexa de planos projetivos. Por outro lado, suponhamos que exista um par de arestas não adjacentes do primeiro tipo, cada uma das quais denotaremos por c . Afirmamos que deve haver outro par de arestas do primeiro tipo (denotadas por d) tal que as arestas desses dois pares se alternam, ou seja, o símbolo que denota o polígono deve ser da forma $c \cdots d \cdots c^{-1} \cdots d^{-1} \cdots$.

Para provarmos a afirmação acima, suponhamos que as arestas denotadas por c não sejam separadas por outro par do primeiro tipo. Assim, nosso polígono terá a aparência mostrada na Figura 3.18, onde X e Y indicam as duas sequências de arestas que separam as arestas c . Cada aresta da sequência X deve ser identificada com alguma outra aresta de X e o mesmo vale para a sequência Y . Em particular, nenhum vértice de X se identifica com algum vértice de Y . Mas isso contraria o fato

de que, pela transformação do passo três, as arestas inicial e final de c se identificam.

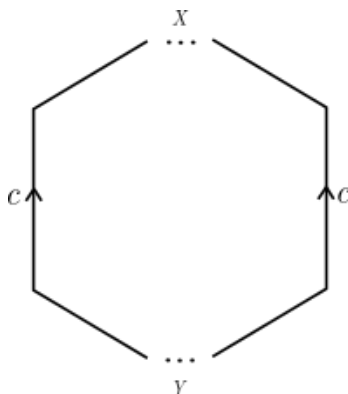


Figura 3.18

Quinto Passo: Alternando arestas do primeiro tipo.

Suponhamos que existam dois pares de arestas do primeiro tipo que se alternam, conforme a Figura 3.19a. Desejamos transformar o polígono de modo a obter dois pares de arestas do primeiro tipo, com as quatro arestas consecutivas e alternadas. Primeiramente, fazemos o corte c , conforme a Figura 3.19a e então identificamos os lados denotados por b , obtendo o polígono da Figura 3.19b. Agora, fazemos o corte d , mostrado na Figura 3.19c, e identificamos os lados a , para finalmente obter o polígono da Figura 3.19d.

Continuamos esse procedimento até que todos os pares de arestas do primeiro tipo estejam em grupos adjacentes de quatro, com símbolos da forma $cdc^{-1}d^{-1}$. Se não houverem pares de arestas do segundo tipo, o teorema estará provado, porque o símbolo da forma $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ denota a soma conexa de n toros.

Resta-nos tratar o caso em que, neste estágio, o polígono tenha pares de arestas do primeiro e segundo tipos. Este caso segue do seguinte lema, um tanto não intuitivo:

Lema 3.1: A soma conexa de um toro e um plano projetivo é homeomorfa a soma conexa de três planos projetivos.

Demonstração. No Exemplo 3.3.2 mostramos que a soma conexa de dois planos projetivos é homeomorfa à garrafa de Klein. Assim, o lema estará provado se mostrarmos que a soma conexa de um toro e um plano projetivo é homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein e um plano projetivo. Para tanto, descreveremos uma maneira conveniente de se construir a soma conexa de uma superfície qualquer S com o toro ou a garrafa de Klein. Inicialmente, tomemos o toro ou a garrafa de Klein como o espaço quociente obtido de um retângulo. Retiremos o interior de um disco fechado no toro ou na garrafa de Klein, conforme a Figura 3.20. Retiremos o interior de um disco fechado na superfície S e identifiquemos o bordo obtido com bordo no toro ou na garrafa de Klein menos o interior de um disco. Entretanto, em vez de fazermos essas identificações em um único passo, identifiquemos primeiro a parte do toro ou da garrafa de Klein

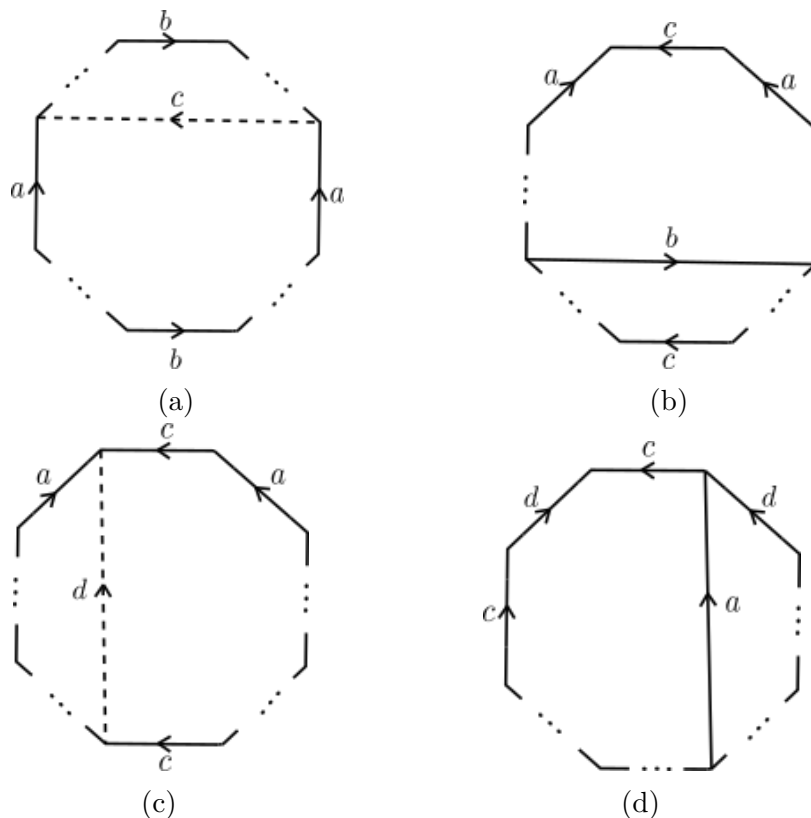


Figura 3.19: Obtendo dois pares de arestas do primeiro tipo alternadas.

correspondente ao quadrado $AA'B'B$, e então identificamos o restante do toro ou da garrafa de Klein.

Na primeira etapa, formamos a soma conexa de S com um cilindro. Como um cilindro é homeomorfo à uma esfera com dois discos abertos retirados e a soma conexa de qualquer superfície com uma esfera é a própria superfície, segue que, após a primeira etapa da soma conexa descrita acima, obtemos a superfície original S com dois discos abertos retirados, ou dois buracos. Na segunda etapa, colamos nos bordos desses dois buracos um tubo aberto (ou cilindro) que é a parte remanescente do toro ou da garrafa de Klein. A diferença aqui é que o tubo remanescente do toro é colado com os bordos com orientação concordante enquanto o tubo remanescente da garrafa de Klein é colado com a orientação das extremidades invertidas.

A Figura 3.21 ilustra o procedimento descrito acima tomando a superfície S como a faixa Möebius.

Afirmamos que as somas conexas mostradas nas Figuras 3.21a e 3.21b são homeomorfas. Para vermos isso, cortamos ao longo do segmento AB em cada um desses espaços. Em qualquer caso, o resultado obtido será o espaço mostrado na Figura 3.22.

Este espaço é, pelo que acabamos de discutir, a soma conexa de um toro e um retângulo com lados denotados por AB a serem identificados, conforme a figura acima. Portanto, os dois espaços são homeomorfos.

Como visto no Exemplo 3.3.2, um plano projetivo pode ver obtido identifi-

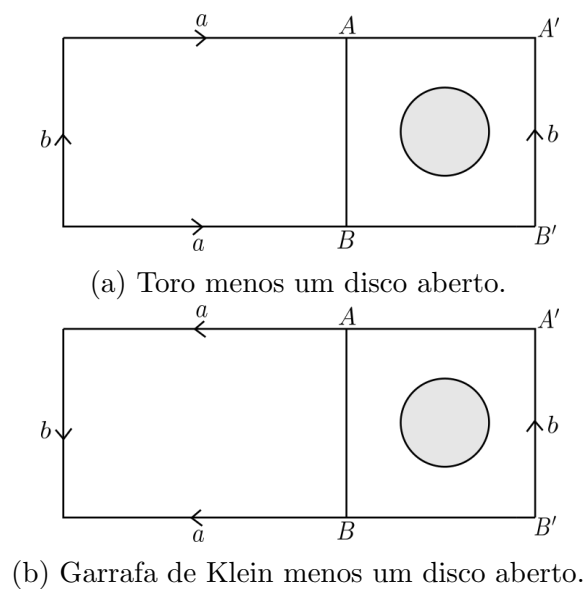


Figura 3.20

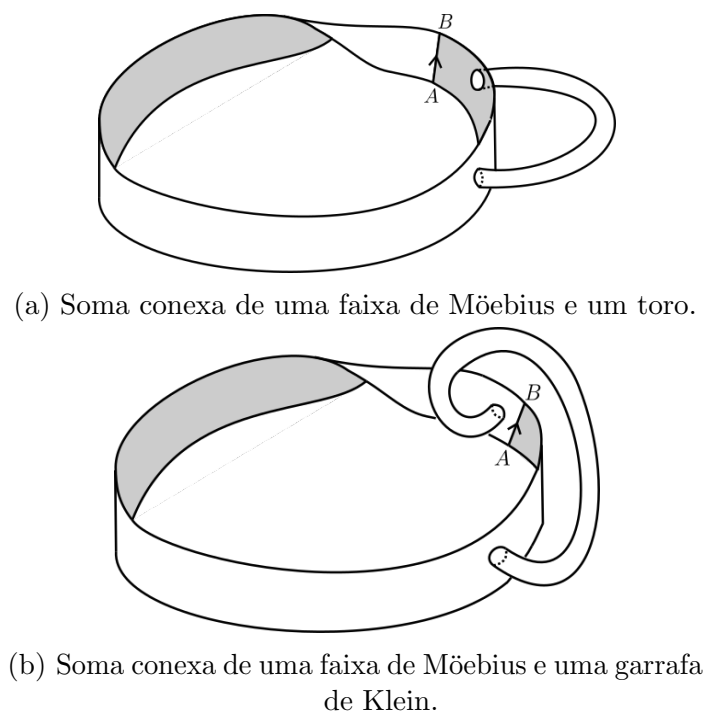


Figura 3.21

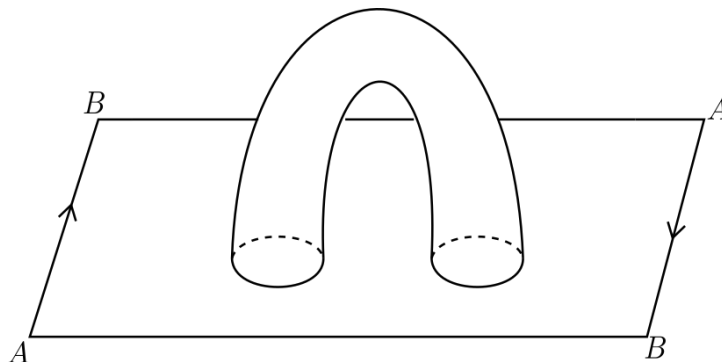


Figura 3.22: Espaço obtido após o corte AB nos espaços da Figura 3.21.

cando o bordo de um disco com o bordo de uma faixa de Möbius. Por outro lado, como os espaços das Figuras 3.21a e 3.21b são homeomorfo, também serão homeomorfos os espaços obtidos de cada um deles pela colagem de um disco. Logo, a soma conexa de um plano projetivo e um toro é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo e uma garrafa de Klein, como queríamos provar. \square

A partir do Lema 3.1 provamos facilmente o caso restante do Teorema de Classificação. Com efeito, suponhamos que após o quinto passo da demonstração, o polígono P tenha $m > 0$ pares de arestas adjacentes do segundo tipo e $n > 0$ quádruplas de arestas, cada uma formada por dois pares de arestas do primeiro tipo que se alternam, conforme o quinto passo da demonstração. Então, temos uma soma conexa de m planos projetivos e n toros o que, pelo Lema 3.1, é homeomorfo à soma conexa de $m + 2n$ planos projetivos. Isso completa a prova do Teorema 3.1.

O lema anterior nos permite ainda enunciar o Teorema de Classificação das Superfícies Compactas da seguinte maneira:

Teorema 3.2: Qualquer superfície compacta orientável é homeomorfa a uma esfera ou a uma soma conexa de toros. Qualquer superfície compacta não orientável é homeomorfa a soma conexa ou de um plano projetivo ou de uma garrafa de Klein, com uma superfície orientável compacta.

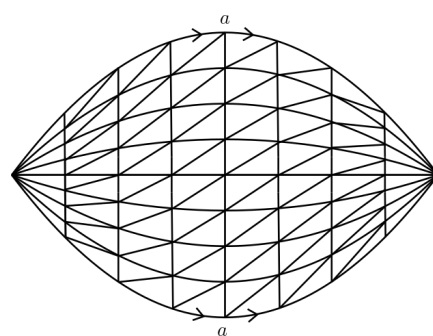
3.5 Característica de Euler

Embora tenhamos mostrados que qualquer superfície compacta é homeomorfa a uma esfera, a uma soma conexa de toros ou a uma soma conexa de planos projetivos, não sabemos dizer se esses espaços são, entre si, homeomorfos ou não. Por exemplo, é concebível que dados dois inteiros positivos distintos m, n , a soma conexa de m toros seja homeomorfa a soma conexa de n toros. Para mostrar que isso não acontece, introduzimos um invariante numérico chamado característica de Euler.

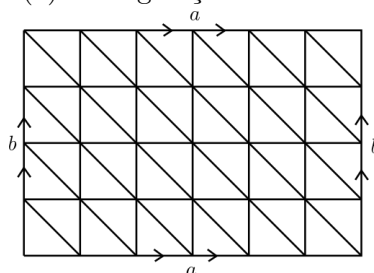
Definição 3.4: Seja M uma superfície compacta e $\tau = \{T_1, \dots, T_n\}$ uma triangulação de M . Denotemos por v, a e $t(= n)$ o número de vértices, arestas e triângulos de τ , respectivamente. Chama-se característica de Euler de M ao número $\chi(M) = v - a + t$.

Para que não haja ambiguidade na definição acima, precisamos mostrar que a característica de Euler de uma superfície não depende da triangulação escolhida. Daremos uma ideia da invariância desse número começando com alguns exemplos.

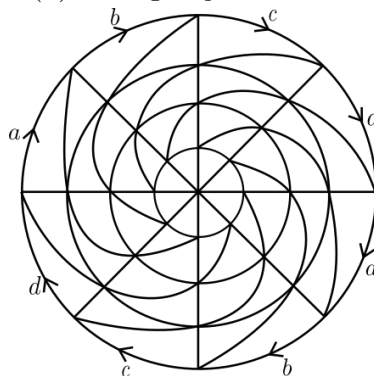
Exemplo 3.5.1: A Figura 3.23 sugere métodos para obter triangulações na esfera, toro e plano projetivo de modo que o número de triângulo seja tão grande quanto queiramos. A partir dessas triangulações podemos verificar que a característica de Euler da esfera, do toro e do plano projetivo são 2, 0 e 1, respectivamente. Podemos ver ainda que a característica de Euler não depende do número de linhas verticais e horizontais nos diagramas que representam a esfera e o toro e também não depende do número de linhas radiais e círculos concêntricos no caso do plano projetivo.



(a) Triangulação da esfera.



(b) Triangulação do toro.



(c) Triangulação do plano projetivo.

Figura 3.23

Estes exemplos sugerem que a característica de Euler $\chi(M)$ depende apenas da superfície compacta M e não da triangulação escolhida. Este fato é verdadeiro e daremos uma ideia de como sua demonstração pode ser construída.

Inicialmente, admitamos que a superfície compacta M possa ser decomposta não apenas em triângulos mas em “polígonos” arbitrários (Figura 3.24). Os “polígonos” podem ter um número arbitrário $n \geq 1$ de vértices e arestas além de serem admitidas arestas que não subdividem uma região (Figura 3.24d). Em todo caso, o interior de cada “polígono” deve ser homeomorfo a um disco aberto e as arestas, sem os vértices, homeomorfas a um intervalo aberto. Cada aresta com seu(s) vértice(s) (fecho da aresta), é homeomorfo a um intervalo fechado ou a um círculo. Finalmente, o número de vértices, arestas e regiões poligonais deve ser finito.

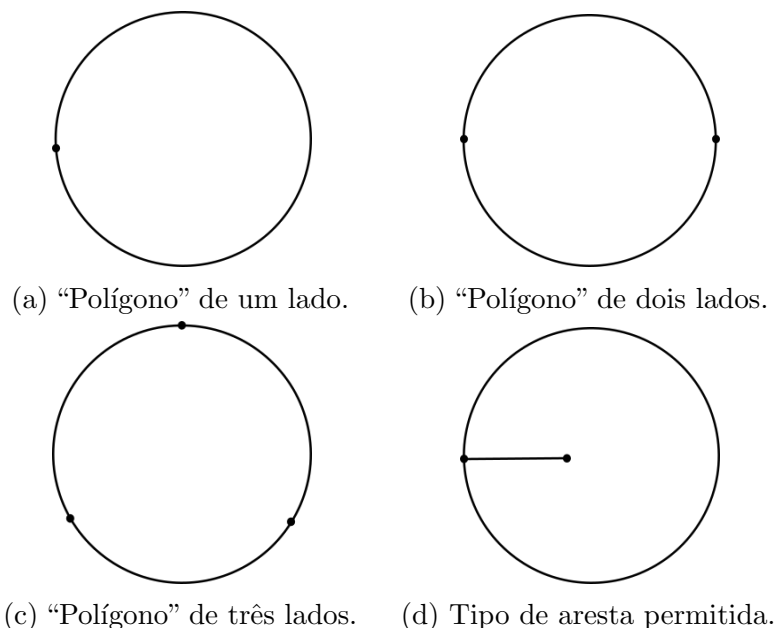


Figura 3.24

Dada uma decomposição de M como descrita acima, definimos a característica de Euler de M da mesma maneira, isto é, $\chi(M) = (\text{número de vértices}) - (\text{número de arestas}) + (\text{número de regiões poligonais})$.

Agora, podemos ver facilmente que característica de Euler da última definição é invariante sob qualquer das seguintes operações:

1. Acrescentar um vértice no interior de uma aresta ou, inversamente, se um vértice é vértice de exatamente duas arestas, podemos eliminá-lo e tornar o par de arestas uma única aresta;
2. Conectar um par de vértices por uma nova aresta ou, inversamente, eliminar uma aresta transformando um par de regiões em uma única região;
3. Acrescentar uma aresta e um vértice no interior de uma região (como na Figura 3.24d) ou, inversamente, eliminar uma aresta e vértice desse tipo.

A invariância por triangulações da característica de Euler é provada se, dadas duas triangulações (ou decomposições) $\tau = \{T_1, \dots, T_m\}$, $\tau' = \{T'_1, \dots, T'_n\}$ de M , pudermos mostrar que, através de uma sequência finita dos procedimentos 1, 2 ou 3, podemos partir de qualquer das triangulações e chegar na outra.

Se a interseção de qualquer aresta da triangulação τ com qualquer aresta da triangulação τ' consiste em um número finito de pontos e intervalos fechados então podemos ir de τ para τ' aplicando um número finito dos passos 1, 2 ou 3. Pode acontecer, entretanto, que uma aresta de τ intersecta uma aresta de τ' em um número infinito de pontos, basta considerar as curvas $\{(x, y); y = 0 \text{ e } -1 \leq x \leq 1\}$ e $\{(x, y); 0 < |x| \leq 1 \text{ e } y = x \text{ sen}(1/x)\} \cup \{(0, 0)\}$. Neste último caso, podemos evitar essa interseção “movendo ligeiramente” uma das arestas. Isso pode ser provado rigorosamente mas não nos deteremos aos detalhes.

A invariância topológica da característica de Euler pode ser provada utilizando-se resultados de Homologia. Mas, a fim de se fazer uma distinção das Superfícies, podemos também calcular seus Grupos Fundamentais, invariante que nos assegura que a soma conexa de n toros (planos projetivos) não é homeomorfa a soma conexa de m toros (planos projetivos), para $m \neq n$, ver [3].

O próximo teorema nos ensinará uma maneira muito simples de computar a característica de Euler de qualquer superfície compacta.

Teorema 3.3: Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas. As características de Euler de S_1, S_2 e da soma conexa $S_1 \# S_2$ são relacionadas pela fórmula

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Demonstração. Suponhamos dadas as triangulações de S_1 e S_2 . Então fazemos a soma conexa retirando o interior de uma região triangular em cada superfície e identificando as arestas, bordos dessas regiões. O resultado segue da contagem dos vértices, arestas e triângulos antes e depois da soma conexa. \square

Conhecidas as características de Euler da esfera do toro e do plano projetivo, usamos o teorema anterior, juntamente com um argumento indutivo, para calcular a característica de Euler de qualquer Superfície Compacta.

Superfície	Característica de Euler
Esfera	2
Soma conexa de n toros	$2 - 2n$
Soma conexa de n planos projetivos	$2 - n$
Soma conexa de um plano projetivo e n toros	$1 - 2n$
Soma conexa de uma garrafa de Klein e n toros	$-2n$

Observe que a característica de Euler de uma superfície orientável é sempre par enquanto a característica de Euler de uma superfície não orientável pode ser par ou ímpar.

A igualdade entre as características de Euler é uma condição suficiente para que duas superfícies orientáveis (não orientáveis) sejam homeomorfas. Admitindo a invariância topológica da característica de Euler (prova-se usando o Grupo Fundamental, por exemplo) e o Teorema de Classificação, temos o seguinte importante resultado:

Teorema 3.4: Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas. Então S_1 e S_2 são homeomorfas

se, e somente, suas características de Euler são iguais e ambas são orientáveis ou ambas são não orientáveis.

Este é um teorema de Topologia por excelência. Ele reduz o problema da classificação de superfícies compactas à determinação da orientabilidade e da característica de Euler, os quais são, em geral, mais simples de se resolver. Juntamente com o Teorema de Classificação, o conhecimento da orientabilidade e da característica de Euler nos permite determinar exatamente a superfície.

Finalizamos este estudo de superfícies compactas mencionando uma terminologia padrão. Uma superfície compacta que é a soma conexa de n toros ou n planos projetivos é dita de gênero n , enquanto a esfera tem gênero 0. Podemos escrever o gênero g de uma superfície compacta S em função de sua característica de Euler χ pondo:

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi), & \text{se } S \text{ é orientável,} \\ 2 - \chi, & \text{se } S \text{ é não orientável.} \end{cases}$$

Conclusões

Conhecimentos de Topologia devem fazer parte da formação de qualquer matemático, independentemente de sua área de formação. Isso porque, além do seu valor intrínseco, a Topologia estuda os ambientes onde se desenvolvem várias outras teorias matemáticas e, juntamente com a Teoria de Conjuntos, constitui a linguagem básica para estas.

Estudar conceitos de Topologia, de um modo geral, foi um dos objetivos deste trabalho. Especificamente, sendo um assunto clássico, presente em vários livros textos introdutórios à Topologia Algébrica e cursos de pós graduação, o estudo das superfícies compactas, no sentido que foi feito neste texto, serve como ponto de partida para a inserção do estudante no mundo da pesquisa matemática, em especial, da Topologia. O assunto tratado torna-se relevante e motivador para teorias mais sofisticadas, como a Homologia, onde a abstração dos conceitos aumenta consideravelmente e resultados mais gerais podem ser obtidos. Invariantes como a característica de Euler, por exemplo, surgem para espaços mais gerais do que as superfícies.

Na Matemática, o aprimoramento de técnicas traz respostas mais simples a problemas antigos e levanta novas perguntas, permitindo sua contínua expansão.

Bibliografia

- [1] Kosniowski, C. *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press, 1980.
- [2] Lima, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. SBM, 2014.
- [3] Massey, W. S. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer, 1977.