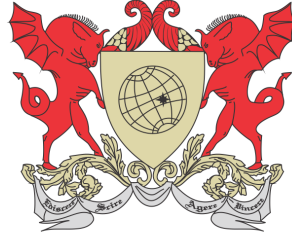


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO



AUGUSTO MEIRELES VARGAS

O TEOREMA DE HOPF-RINOW EM
VARIÉDADES RIEMANNIANA COMPLETAS.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2022

AUGUSTO MEIRELES VARGAS

**O TEOREMA DE HOPF-RINOW EM VARIEDADES
RIEMANNIANA COMPLETAS.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2022

AUGUSTO MEIRELES VARGAS

**O TEOREMA DE HOPF-RINOW EM VARIEDADES
RIEMANNIANA COMPLETAS.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

APROVADO: 11 de fevereiro de 2022.

Lucas Carvalho Silva

Luiz Gustavo Perona Araújo

Alexandre Alvarenga Rocha
(Orientador)

“Você sabe o que é mais legal do que mágica? Matemática.”

Peter Parker

Agradecimentos

Ao meu orientador, Alexandre Alvarenga Rocha pela oportunidade e ensinamentos.

Aos meus pais, Cleusa e Hélio e ao meu irmão, Alisson pelo incentivo e apoio.

Aos meus amigos de graduação por todo apoio dado durante o curso.

Resumo

VARGAS, Augusto Meireles, Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2022. **O Teorema de Hopf-Rinow em Variedades Riemanniana Completas..** Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

O objetivo deste trabalho é uma pesquisa bibliográfica onde faremos o estudo introdutório à geometria Riemanniana, tendo como resultado uma aplicação do Teorema de Hopf-Rinow. Os pré-requisitos para abordar tal tema são conhecimentos básicos de Geometria diferencial, Análise e Álgebra Linear.

O projeto se divide em sete capítulos intitulados, Introdução; Variedades Diferenciáveis; Variedades Riemannianas; Conexão Afim e Conexão Riemanniana; Geodésicas; O Teorema de Hopf-Rinow e Conclusões.

O Capítulo 1 se ocupa basicamente de comparações entre variedades com superfícies e das motivações ao estudo do que se segue. No Capítulo 2, são abordados temas básicos de um curso de Geometria Riemanniana, contendo resultados necessários para o desenvolvimento do Capítulo 3. No capítulo 4, é definida a conexão Riemanniana a qual tem a finalidade a “derivação usual” no produto interno. No Capítulo 5, trabalhamos as geodésicas. Mostra-se que toda curva minimizante é uma geodésica. Portanto, toda curva geodésica é uma candidata a minimizante, tornando mais simples a tarefa de encontrar as curvas minimizantes, visto que devemos procurá-las dentre as geodésicas. No capítulo 6, chegamos ao tema central desse trabalho, o Teorema de Hopf-Rinow que garante a existência de curvas minimizantes de distâncias que ligam dois pontos quaisquer de uma variedade fechada.

Considerações finais acerca do trabalho são realizadas no Capítulo 7.

Abstract

VARGAS, Augusto Meireles, Universidade Federal de Viçosa, February, 2022. **The Hopf-Rinow Theorem on Complete Riemannian Manifolds.** Adviser: Alexandre Alvarenga Rocha.

The objective of this work is a bibliographical research where we will make the introductory study to Riemannian geometry, resulting in an application of the Hopf-Rinow theorem. The prerequisites for approaching this topic are basic knowledge of Differential Geometry, Analysis and Linear Algebra.

The project is divided into seven chapters entitled, Introduction; Differentiable Varieties; Riemannian manifolds; Affine Connection and Riemannian Connection; Geodesics; The Hopf-Rinow Theorem and Conclusions.

Chapter 1 is basically concerned with comparisons between varieties with surfaces and motivations for studying what follows. In Chapter 2, basic topics of a Riemannian Geometry course are addressed, containing the necessary results for the development of Chapter 3. In chapter 4, the Riemannian connection is defined, which has the purpose of the “usual derivation” in the inner product. In Chapter 5, we work on geodesics. It is shown that every minimizing curve is a geodesic. Therefore, every geodesic curve is a candidate for minimizing, making the task of finding the minimizing curves simpler, since we must look for them among the geodesics. In chapter 6, we get to the central theme of this work, the Hopf-Rinow Theorem which guarantees the existence of distance-minimizing curves connecting any two points of a closed variety.

Final considerations about the work are made in Chapter 7.

Sumário

1	Introdução	1
2	Variedades Diferenciáveis	2
2.1	A noção de variedades	3
2.2	Derivada direcional	9
2.2.1	O fibrado tangente	11
2.3	Orientação	12
2.4	Campos de vetores	13
3	Variedades Riemannianas	15
3.1	Métricas Riemannianas	15
4	Conexão Afim e Conexão Riemanniana	19
4.1	Conexões afins	19
4.2	Conexão Riemanniana	22
5	Geodésicas	26
5.1	Fluxo geodésico em variedades	26
5.2	Propriedades minimizantes	30
6	O Teorema de Hopf-Rinow	38
7	Conclusões	45

Introdução

A geometria Riemanniana é uma generalização da geometria diferenciável em que se estuda as variedades Riemannianas (uma variedade diferenciável em que cada espaço tangente é dotado de um produto interno que varia suavemente ponto a ponto). Ela tem profundas conexões com diversas áreas da matemática; como, por exemplo, Equações Diferenciais Parciais além das suas aplicações na relatividade e em mecânica celeste.

Com estas características, podemos definir diversas métricas como ângulos, áreas, curvaturas e o interesse desse trabalho, comprimento de curvas. No plano euclidiano sabemos que as curvas que minimizam as distâncias são as retas. Entretanto, quando se trata de variedades, as curvas devem estar contidas nela, o que torna o trabalho de encontrar a curva que minimiza a distância um processo mais complicado.

Dada uma variedade diferenciável n -dimensional conexa, é normal de se pensar que deve haver uma curva que minimize a distância entre dois pontos (neste trabalho todas as variedades serão conexas). Tal curva é chamada minimizante e se prova que toda curva que minimiza a distância é uma geodésica. Assim, encontrando o conjunto de todas as geodésicas, temos as candidatas a minimizantes, tornando o processo de encontrá-los um pouco mais simples. O Teorema de Hopf-Rinow garante a existência de curvas minimizantes de distâncias que ligam dois pontos quaisquer de uma variedade completa. Assim, dados dois pontos na variedade completa existe sempre uma geodésica minimizante que os conecta.

Variedades Diferenciáveis

As variedades diferenciáveis surgem para estender a utilização de ferramentas do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o \mathbb{R}^n . Recordemos a definição de superfície regular.

Definição 2.1 (Superfície regular): Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\mathbf{x}: U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

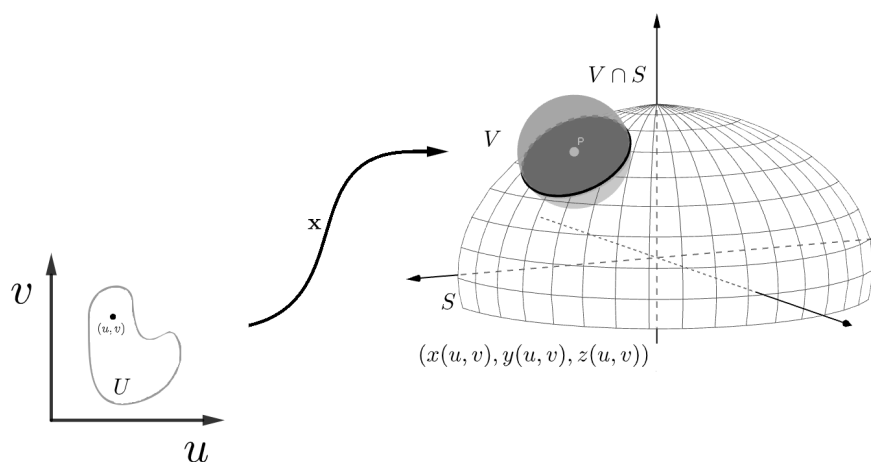
1. \mathbf{x} é diferenciável. Isto significa que se escrevermos,

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in U$$

as funções coordenadas têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

2. \mathbf{x} é um homeomorfismo. Como \mathbf{x} é contínua pela condição 1, isto significa que \mathbf{x} tem inversa $\mathbf{x}^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Figura 2.1: Superfície regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como consequência da definição, temos a chamada mudança de parâmetros sendo um difeomorfismo, ou seja, se temos duas parametrizações $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ e $x_\beta : U_\beta \rightarrow S$ de modo que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ então as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^2$ são diferenciáveis. Mais detalhes da proposição podem ser encontrados em [2]

Podemos pensar então nas superfícies regulares de \mathbb{R}^3 como deformações de pedaços do plano, colados sem que resulte em pontas, arestas ou auto interseções, de modo que quando dois abertos se intersectam a transição de um para outro se realiza de maneira diferenciável. Dessa forma, faz sentido falar de funções diferenciáveis e aplicar os métodos do Cálculo Diferencial em superfícies do \mathbb{R}^3 .

O problema na definição de superfícies é a grande dependência do \mathbb{R}^3 , o que queremos de fato é aplicar o Cálculo Diferencial, sem a dependência do espaço euclidiano no qual a superfície está inserida. As variedades diferenciáveis não possuem esse limitador, e serão definidas de $\mathbb{R}^n \rightarrow M$ com n qualquer. Diferenciável significará sempre de classe C^∞ .

2.1 A noção de variedades

Definição 2.2 (Variedade diferenciável): Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:

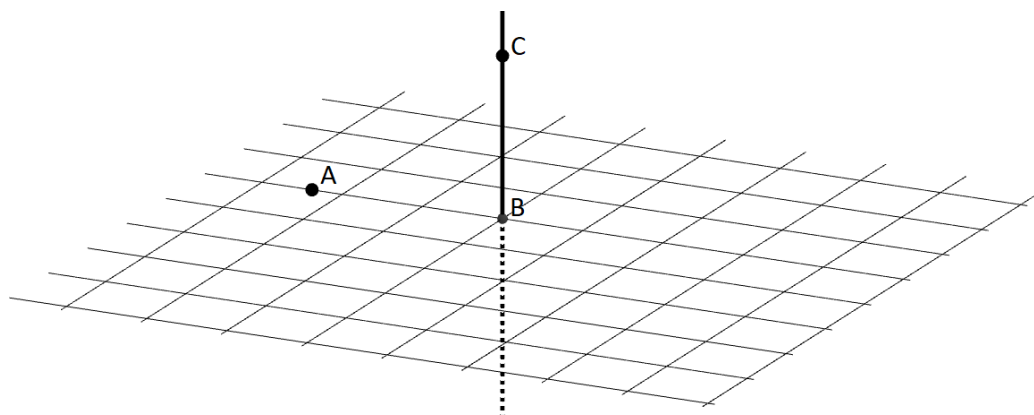
1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta$ são diferenciáveis.
3. A família de aplicações biunívocas $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

Note que a definição de variedades se assemelha bastante com a definição de superfícies. Além da generalização da dimensão de 2 para n , o ponto crucial é a exigência da diferenciabilidade na mudança de parâmetros garantindo a possibilidade de usarmos as ferramentas do Cálculo Diferencial.

Chamamos parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p , o par (U_α, x_α) (ou aplicação x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$. O aberto $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado vizinhança coordenada em p .

Exemplo 2.1.1: Todo espaço euclidiano, munido com a identidade $(\mathbb{R}^n, Id \mathbb{R}^n)$ como única aplicação é uma variedade diferenciável.

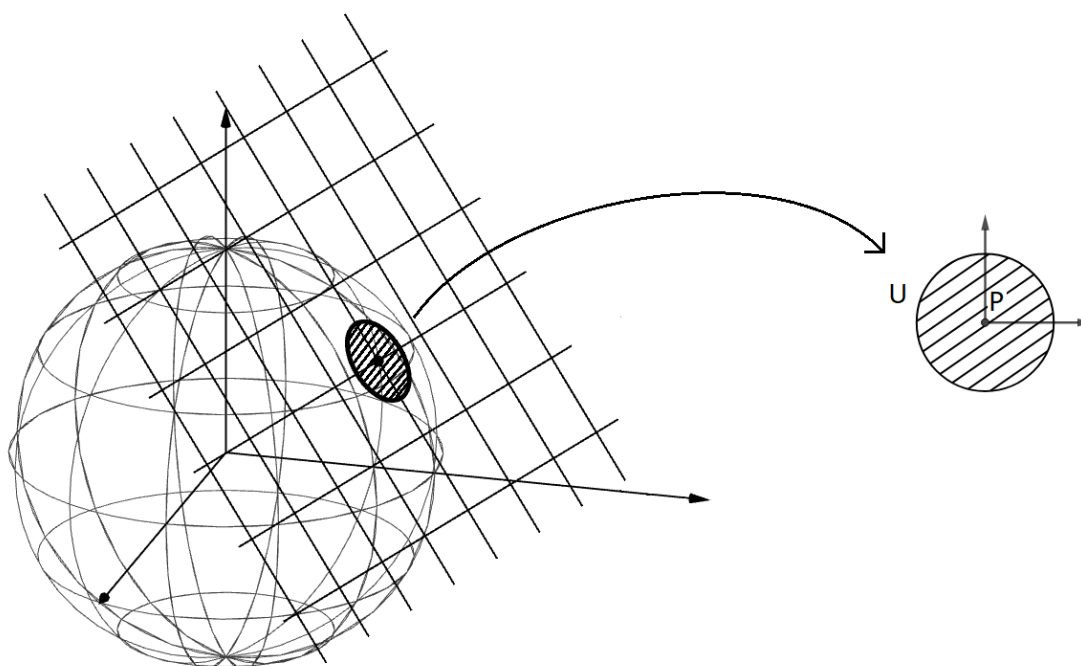
Exemplo 2.1.2 (Não variedade): O conjunto de uma reta unida com um plano que não a contenha não é uma variedade diferenciável.

Figura 2.2: Exemplo de não variedade.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O ponto A tem uma vizinhança que é homeomorfa ao \mathbb{R}^2 , o ponto C vizinhança homeomorfa ao \mathbb{R} e toda vizinhança de B contém um pedaço do plano e da reta. Assim esse conjunto não pode ser uma variedade, pois falha a segunda condição da definição de variedades.

Exemplo 2.1.3: A esfera $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com a topologia induzida por \mathbb{R}^n é localmente euclidiana, ou seja, para cada ponto $p \in S^n$ existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfa a um aberto de S^n .

Figura 2.3: Esfera

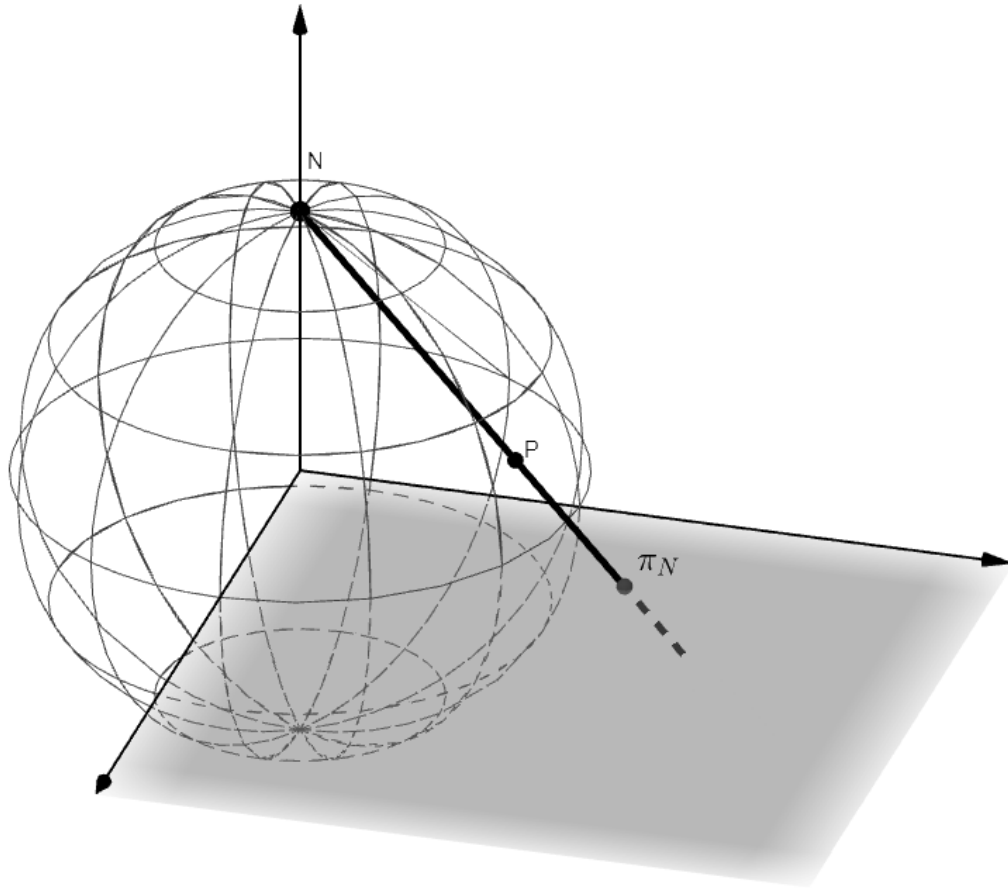
Fonte: Elaborada pelo autor.

Se denotarmos por $N = (0, \dots, 0, 1)$ e $S = (0, \dots, 0, -1)$ os polos norte e sul,

obtemos dois sistemas de coordenadas $(S^n - \{N\}, \pi_N)$ e $(S^n - \{S\}, \pi_S)$ onde π_N e π_S denotam as projeções estereográficas por N e S respectivamente.

π_N leva um ponto $p = (x_1, \dots, x_{n+1} \in S^n - \{N\})$ no ponto de interseção hiperplano com $x_{n+1} = 0$ com a reta que passa por p e N .

Figura 2.4: Projeção estereográfica π_N .



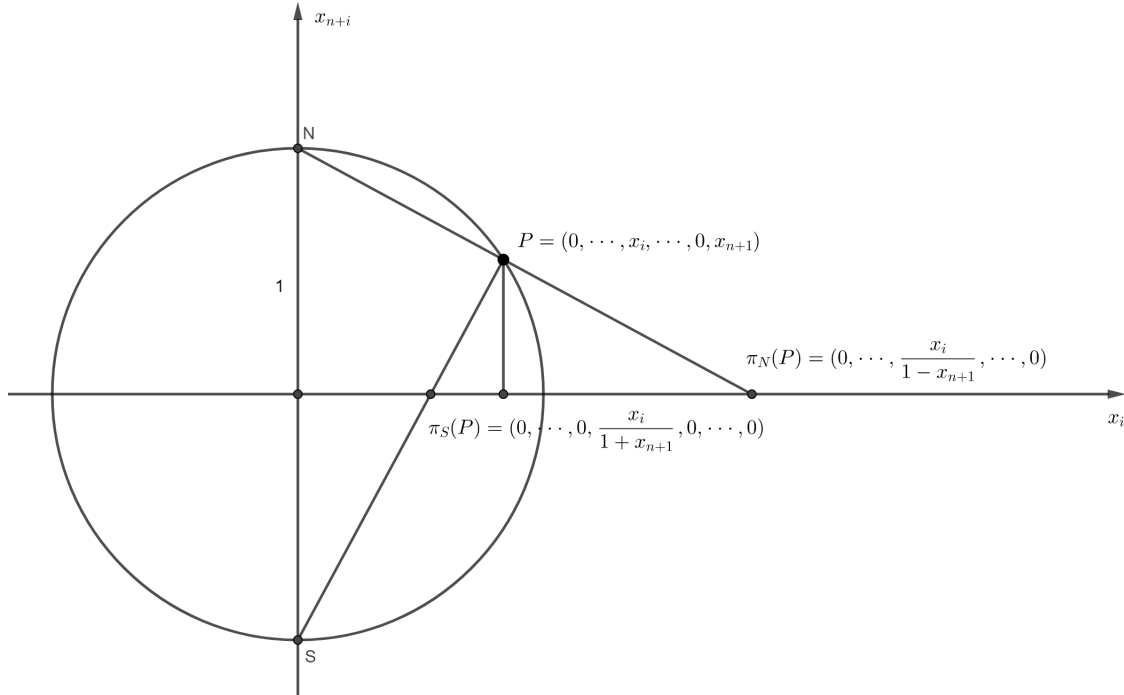
Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos escrever π_N como:

$$\pi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

A aplicação π_N é diferenciável e injetiva. Podemos escrever π_S de maneira análoga trocando N por S . π_S possui as mesmas propriedades e pode ser escrita como:

$$\pi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

Figura 2.5: Projeção estereográfica π_N e π_S .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim as parametrizações $(\mathbb{R}^n, \pi_N^{-1})$ e $(\mathbb{R}^n, \pi_S^{-1})$ cobrem a esfera S^n .
As funções de mudança de coordenadas são de classe C^∞ onde,

$$y_j = \frac{x_j}{1 - x_{n+1}} \mapsto y'_j = \frac{x_j}{1 + x_{n+1}}$$

$$(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, n$$

Usando a definição da esfera $\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1$ uma das mudanças de coordenadas é dada por:

$$y'_j = \frac{y_j}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Assim a esfera com as aplicações dadas cumpre os requisitos 1 e 2 da definição de variedades diferenciáveis. Quando isso ocorre chamamos o par (U_α, x_α) de estrutura diferencial. Em verdade o requisito 3 aparece por razões puramente técnicas já que podemos completar uma estrutura diferenciável de modo a torná-la máxima. Basta considerarmos então, a coleção maximal que contém as parametrizações acima e temos que a esfera é uma variedade diferenciável como queríamos.

Exemplo 2.1.4 (Gráficos): Os gráficos serão variedades.

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty(U)$$

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in U\}.$$

Com a única parametrização dada por:

$$\varphi : U \rightarrow G(f), \varphi(x) = (x, \varphi(x))$$

É esperado que todas as superfícies regulares também sejam variedades e de fato isso ocorre.

Exemplo 2.1.5 (Superfícies de dimensão 3): A afirmação é imediata, basta usar as parametrizações $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$ e graças ao teorema da função implícita, temos que as mudanças de coordenadas de superfícies regulares são diferenciáveis. Logo as superfícies são variedades de dimensão 2.

Em verdade, podemos ampliar a definição de superfícies para uma dimensão k .

A importância do exemplo acima é que ele nos garante uma infinidade de exemplos de variedades.

Definição 2.3 (Superfícies de dimensão k): Um subconjunto $M^k \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície regular de dimensão k se para cada $p \in M^k$ existem uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^n e uma aplicação $x : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M \cap V$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $M \cap V$ tais que:

- (a) x é um homeomorfismo diferenciável.
- (b) $(dx)_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$.

De maneira análoga a superfícies de dimensão 3, utilizando o teorema da função inversa, temos que a mudança de coordenadas é diferenciável e assim elas também são variedades.

Definição 2.4: Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável de um aberto U do \mathbb{R}^n . Um ponto $p \in U$ é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é sobrejetiva. A imagem $F(p)$ de um ponto crítico é chamada um valor crítico de F . Um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico é chamado um valor regular de F .

Exemplo 2.1.6 (Imagem inversa de um valor regular): Sejam

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad F \in C^\infty.$$

e $a \in \mathbb{R}$ valor regular de F .

Então, $M = F^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ é variedade diferencial.

Demonstração do exemplo 2.1.6: Pelo teorema da função implícita temos que localmente M é um gráfico, de fato como a é um valor regular temos:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = \nabla F(P) \neq 0 \quad \forall p \in F^{-1}(a)$$

Como o gradiente difere de zero, alguma das coordenadas difere de zero, usamos essa coordenada para construir o gráfico em torno de p e utilizando o exemplo 2.1.4 temos que esse gráfico é uma variedade. Já que isso vale para todo o ponto p ,

conseguimos cobrir toda a variedade com gráficos. Mostra-se também que a interseção de tais gráficos é diferenciável. Concluimos com isso que a imagem inversa de um valor regular é uma variedade.

Notação: Doravante, quando indicada uma variedade por M^n o índice superior n indicará a dimensão de M .

Para seguirmos adiante estabeleceremos o conceito de diferenciabilidade de uma aplicação entre variedades.

Definição 2.5: Sejam, M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Diremos que uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em um ponto $p \in M_1$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização,

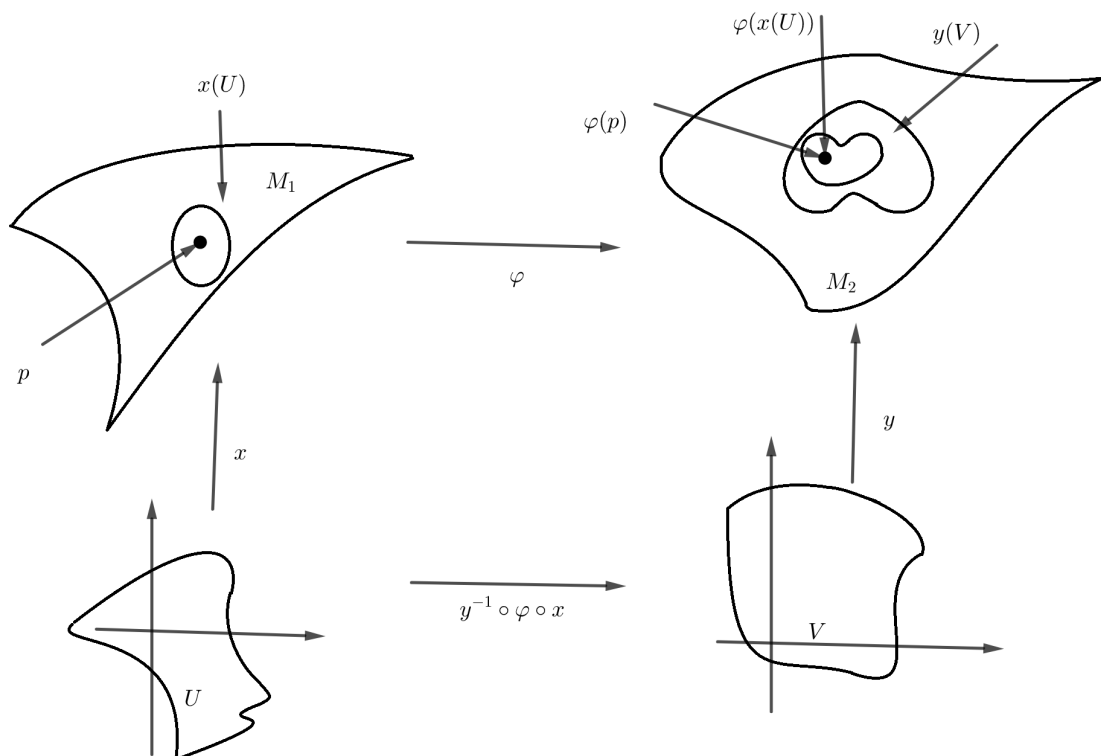
$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$$

em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação,

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$.

Figura 2.6: Aplicação diferenciável.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Diremos que φ é diferenciável em um aberto de M_1 se φ for diferenciável em todos os pontos deste aberto. Pela condição 2 da definição de variedade diferenciável

é imediato que se φ for diferenciável em p em uma parametrização ela será também em outra qualquer que contenha p em seu domínio.

2.2 Derivada direcional

Um dos pontos cruciais no estudo de superfícies regulares é a noção de vetor tangente. Usaremos os conhecimentos obtidos das superfícies regulares de \mathbb{R}^3 para encontrarmos o de variedades. Para superfícies temos a seguinte definição:

Definição 2.6 (Vetor tangente em superfícies): Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva parametrizada diferenciável. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é dito vetor tangente de α em t .

Nas superfícies do \mathbb{R}^3 o vetor tangente $\alpha'(t)$ tem uma propriedade interessante: $\alpha'(t)$ nos dá a velocidade da curva α no instante t . Como não temos mais o suporte de um espaço ambiente, encontraremos uma característica para o vetor tangente de variedades que substitua a de velocidade que temos em \mathbb{R}^3 .

Fixe $p \in M$. Considere a curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$, e $x : U \rightarrow x(U)$ tal que p pertença a $x(U)$ podemos escrever α como:

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in (-\epsilon, \epsilon), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Assim,

$$\alpha'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_n(0)) = v \in \mathbb{R}^n$$

Em uma vizinhança de p o vetor tangente atua nas funções diferenciáveis. De fato, se f for uma função diferenciável definida em uma vizinhança de p , restringindo f a curva α , temos a derivada direcional em relação de v como:

$$\left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t=0} \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} = \left(\sum_i x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

Note que essa operação não depende da escolha de α , assim a derivada direcional é um operador sobre funções diferenciáveis que depende exclusivamente de v . Esta é a propriedade característica que desejávamos.

Definição 2.7 (Vetor tangente): Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja \mathcal{D} o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathcal{D},$$

Um vetor tangente em p , é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$.

Sejam $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ parametrização com $p \in x(U)$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Temos,

$$q = (x_1, \dots, x_n) \in U, \quad f \circ x(q) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Se $\alpha(t) \in x(U)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, então $x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ é uma curva em U .

Assim restringindo f a α :

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 = \left(\sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f. \end{aligned}$$

Ou seja, α' na parametrização x é dado por:

$$\alpha'(0) = \left(\sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right).$$

Onde $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ é o vetor tangente em p correspondente a i -ésima curva coordenada.

Da última igualdade temos dois resultados importantes:

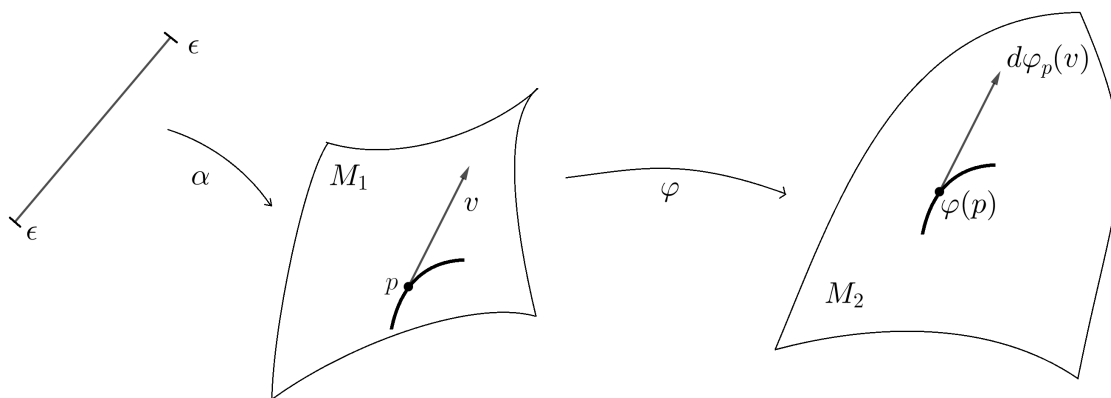
1. O vetor tangente α' depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas.
2. T_pM é um espaço vetorial de dimensão n . Ele é formado pelo conjunto de vetores tangentes à variedade M no ponto p . A base de T_pM depende da escolha da parametrização $x : U \rightarrow M$, e é dada por:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}.$$

Proposição 2.1: Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .

Demonstração da proposição 2.1: A demonstração pode ser encontrada em [1]

□

Figura 2.7: Aplicação linear $d\varphi_p$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.8: A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela proposição 2.1 é chamada diferencial de φ em p .

Definição 2.9: Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, injetiva, sobrejetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

O conceito de difeomorfismo é um conceito natural de equivalência entre variedades diferenciáveis. A consequência imediata do teorema da função composta é que se $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo, então $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é um isomorfismo para todo $p \in M_1$; em particular M_1 e M_2 têm dimensões iguais. O inverso local deste fato é o famoso teorema da aplicação inversa para variedades.

Teorema 2.1: Sejam $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^n$ uma aplicação diferenciável e $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é um isomorfismo. Então φ é um difeomorfismo local em p .

Demonstração do teorema 2.1: A demonstração é uma aplicação imediata do teorema da função inversa no \mathbb{R}^n .

□

2.2.1 O fibrado tangente

Sejam M^n uma variedade diferenciável e $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\} = \bigcup_{p \in M} T_p M$

Teremos que TM tem uma estrutura diferenciável, com dimensão $2n$.

Seja $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ a estrutura diferenciável máxima de M . Denotaremos por $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $x_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α , defina:

$$\mathbf{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM,$$

por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) &= \\ &= \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right), (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Geometricamente, isso significa que encontramos as coordenadas do ponto $(p, v) \in TM$ como as coordenadas $x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha$ de p mais as coordenadas de v na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$.

De fato TM é uma estrutura diferenciável, já que $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$ e $(dx_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}M$, $q \in U_\alpha$, temos:

$$\bigcup_\alpha \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM.$$

o que satisfaz a primeira condição da definição 2.2. Temos também:

$$(p, v) \in \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbf{y}_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n).$$

Então,

$$(p, v) = (\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = (\mathbf{x}_\beta(q_\beta), d\mathbf{x}_\beta(v_\beta)),$$

onde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) &= \mathbf{y}_\beta^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = \\ &= ((\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(q_\alpha), d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(v_\alpha)). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ é diferenciável, $d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)$ também o é. Decorre daí que $\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha$ é diferenciável, o que verifica a segunda condição da definição 2.2. Com isso concluímos o exemplo.

2.3 Orientação

Definição 2.10: Dizemos que M^n é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ de modo que:

1. $\bigcup_\alpha \{(U_\alpha, x_\alpha)\} = M$.
2. Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ possui determinante positivo.

A escolha de tal estrutura é chamada orientação de M . M , neste caso, é chamada orientada. Se tal escolha não for possível, a variedade é chamada não orientável.

Exemplo 2.3.1: Todas as variedades que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são trivialmente orientáveis. Em particular, o \mathbb{R}^n por 2.1.1 e as variedades que são gráficos de uma função já que essas são variedades diferenciáveis pela proposição 2.1.4.

Exemplo 2.3.2: Se uma variedade diferenciável pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas, cuja interseção é conexa, então a variedade é orientável. De fato, seja

W a interseção das vizinhanças, tome um ponto $p \in W$. Se o determinante da mudança de coordenadas em p for negativo basta alterar a ordem de uma das bases, assim o determinante se torna positivo. Como o determinante difere de zero em W além de ser positivo em p , pela conexidade de W o Jacobiano é positivo em todos os pontos de W satisfazendo assim a definição de orientabilidade.

Facilmente podemos verificar que uma variedade diferenciável conexa orientável admite duas, e somente duas, orientações distintas.

Sejam agora M_1 e M_2 variedades diferenciáveis e $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ um difeomorfismo. É imediato verificar que M_1 é orientável se e só se M_2 é orientável. Se, além disto, M_1 e M_2 são conexas e estão orientadas, φ induz uma orientação em M_2 que pode coincidir ou não com a orientação de M_1 . Dizemos então que φ preserva a orientação se elas coincidem. No caso em que φ não coincidir com a orientação inicial de M_1 dizemos que φ reverte a orientação.

2.4 Campos de vetores

Definição 2.11 (Campo de vetores): Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Como aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável, no sentido de diferenciabilidade entre variedades já que TM é uma variedade de dimensão $2n$.

Veremos como isso acontece na imagem de uma certa parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$,

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.1)$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada a $x, i = 1, \dots, n$. É claro que X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma parametrização. Como a mudança de coordenadas é um difeomorfismo, consequentemente X é diferenciável para qualquer parametrização.

Por vezes é mais conveniente utilizar a ideia sugerida por 2.1 e pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ do conjunto \mathcal{D} das funções diferenciáveis em M no conjunto \mathcal{F} das funções em M , definida do seguinte modo:

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad f \in \mathcal{D},$$

onde f , por abuso de notação, é a expressão de f na parametrização x .

Lema 2.1: Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.

Demonstração do lema 2.1: Mostraremos que se Z existe, então ele é único. Depois

mostraremos sua existência.

Suponha que tal campo Z exista. Sejam $p \in M$ e $x : U \rightarrow M$ uma parametrização em p e sejam:

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

as expressões dos campos X e Y na parametrização x . Logo para toda f em \mathcal{D} temos:

$$\begin{aligned} XYf &= X \left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \\ YXf &= Y \left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned}$$

Subtraindo as equações obtemos:

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (2.2)$$

Como os índices a e b são únicos, temos que Z fica bem definido.

Para provar a existência, defina em cada vizinhança coordenada $x_\alpha(U_\alpha)$ da estrutura $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ Z_α como na equação 2.2. Nas interseções entre duas vizinhanças utilizamos a sua unicidade e assim podemos definir Z em toda a variedade M .

□

Definição 2.12: Chamamos de colchete $[X, Y]$ o campo vetorial Z dado pelo Lema 2.1. O colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y ; Z é evidentemente diferenciável.

Variedades Riemannianas

Queremos cada vez mais trabalhar nas variedades independentemente ao espaço \mathbb{R}^n . Para fazermos geometria nas variedades precisamos do conceito de métrica na variedade, a partir dela conseguiremos calcular e estender conceitos da geometria diferencial clássica como comprimento de curva, área e volume.

3.1 Métricas Riemannianas

Definição 3.1: Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:

Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em U .

Para a noção de equivalência entre as estruturas temos a definição de isometria.

Definição 3.2: Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad \forall p \in M, u, v \in T_p M. \quad (3.1)$$

Definição 3.3: Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo 3.1.

Exemplo 3.1.1 (O exemplo canônico): Seja $M = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Assim, $T_p M = M = \mathbb{R}^n$ e a métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

\mathbb{R}^n é chamado espaço euclidiano de dimensão n e a geometria Riemanniana deste espaço é a geometria métrica euclidiana.

Exemplo 3.1.2 (Métrica produto): Sejam M e N variedades diferenciáveis e sejam $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, \mathbf{y}_\beta)\}$ as estruturas diferenciáveis de M e N respectivamente. Considere o produto cartesiano $M \times N$ e as aplicações $\mathbf{z}_{\alpha\beta}(p, q) = (\mathbf{x}_\alpha(p), \mathbf{y}_\beta(q))$, $p \in U_\alpha$, $q \in V_\beta$. É fácil verificar que $\{(U_\alpha \times V_\beta, \mathbf{z}_{\alpha\beta})\}$ é uma estrutura diferenciável em $M \times N$. De maneira natural, podemos induzir uma métrica em $M \times N$ como se segue.

Sejam $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ e $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ as projeções canônicas de M e N , respectivamente. Então, defina a métrica produto em $(p, q) \in M \times N$ por:

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1 \cdot u, d\pi_1 \cdot v \rangle_p + \langle d\pi_2 \cdot u, d\pi_2 \cdot v \rangle_q$$

para todo $(p, q) \in M \times N$ e $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$. É de fácil comprovação que esta é, de fato, uma métrica para o produto $M \times N$.

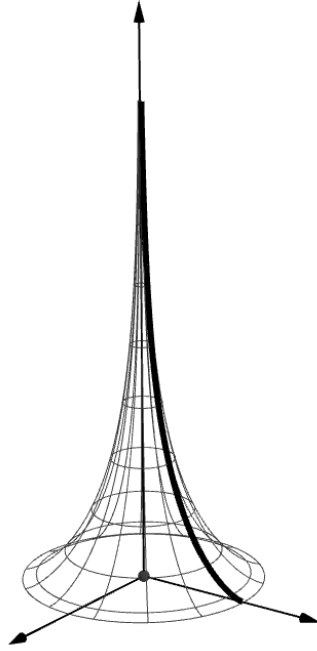
Com o exemplo anterior conseguimos encontrar a métrica para diversos objetos como, por exemplo, o toro $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ com a estrutura Riemanniana obtida escolhendo no círculo $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ a métrica Riemanniana induzida por \mathbb{R}^2 e tomando a métrica produto n vezes. Chamamos toro plano o toro T^n com esta métrica Riemanniana.

Exemplo 3.1.3 (Pseudo esfera): A pseudo esfera é uma superfície de revolução obtida pela rotação da tratrix, cuja parametrização é:

$$x = \operatorname{sech} u \cos v$$

$$y = \operatorname{sech} u \sin v;$$

$$z = u - \tanh u.$$

Figura 3.1: Pseudo esfera.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Efetuando, $X_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $X_v = (x_v, y_v, z_v)$ temos:

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \langle X_u, X_u \rangle \\
 &= \left(-\cos(v) \tanh(u) \operatorname{sech}(u), -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \sin(v), 1 - \operatorname{sech}^2(u) \right) \cdot \begin{pmatrix} -\cos(v) \tanh(u) \operatorname{sech}(u) \\ -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \sin(v) \\ 1 - \operatorname{sech}^2(u) \end{pmatrix} \\
 &= \cos^2(v) \operatorname{sech}^2(u) \tanh^2(u) + \operatorname{sech}^2(u) \sin^2(v) \tanh^2(u) + (1 - \operatorname{sech}^2(u))^2 = \tanh^2(u)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{12} &= g_{21} = \langle X_u, X_v \rangle \\
 &= \left(-\cos(v) \tanh(u) \operatorname{sech}(u), -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \sin(v), 1 - \operatorname{sech}^2(u) \right) \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sech}(u) \sin(v) \\ \operatorname{sech}(u) \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= (\cos(v) \operatorname{sech}^2(u) \sin(v) \tanh(u) - \cos(v) \operatorname{sech}^2(u) \sin(v) \tanh(u) + 0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{22} &= \langle X_v, X_v \rangle \\
 &= \left(-\operatorname{sech}(u) \sin(v), \operatorname{sech}(u) \cos(v), 0 \right) \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sech}(u) \sin(v) \\ \operatorname{sech}(u) \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= (\operatorname{sech}^2(u) \sin^2(v) + \cos^2(v) \operatorname{sech}^2(u)) = \operatorname{sech}^2(u)
 \end{aligned}$$

Assim temos:

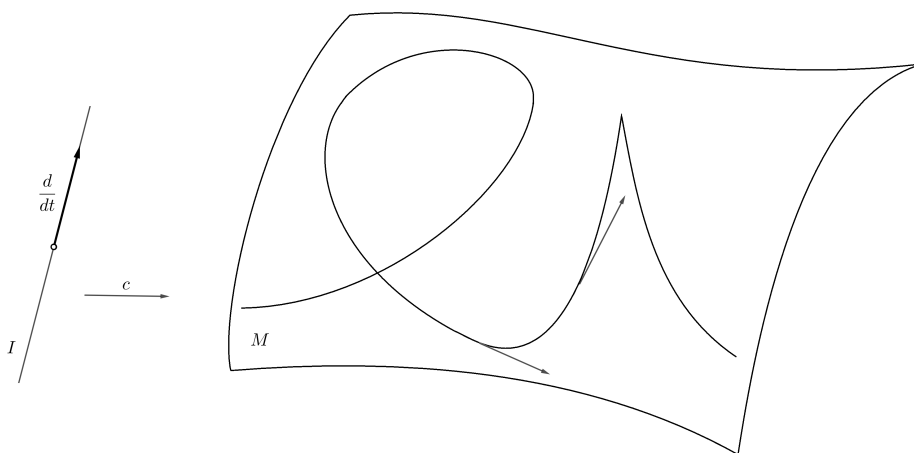
$$g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle = \tanh^2 u,$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle X_u, X_v \rangle = 0,$$

$$g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle = \operatorname{sech}^2 u.$$

Definição 3.4: Chamamos curva parametrizada uma aplicação diferenciável $c : I \rightarrow M$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em uma variedade diferenciável M .

Figura 3.2: Exemplo de curva parametrizada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação: Por diversas vezes, por um abuso de linguagem, chamaremos a imagem da aplicação c de curva. Note que uma curva parametrizada pode ter auto-interseções e “bicos”.

Definição 3.5: Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que associa a cada $t \in I$ um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Dizemos que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M , a função $t \rightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I .

Chamamos campo velocidade (ou tangente) de c o campo vetorial $dc \left(\frac{d}{dt} \right)$ indicado por $\frac{dc}{dt}$:

Restringindo uma curva c em um intervalo fechado $[a, b] \in I$ temos um segmento. Se M é uma variedade Riemanniana definimos o comprimento do segmento por:

$$\ell_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

Conexão Afim e Conexão Riemanniana

Definimos o vetor velocidade em uma variedade riemanniana M graças ao conceito de espaço tangente. Com isso podemos encontrar a velocidade de uma curva c em uma variedade. Naturalmente, é de se pensar em como poderíamos encontrar a aceleração dessa curva.

Vamos novamente, recorrer às ideias que usamos em superfícies. Sejam S uma superfície do \mathbb{R}^3 , $\mathbf{c} : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores tangentes a S restritos a \mathbf{c} . O vetor $\frac{dV}{dt}, t \in I$, em geral, não pertence ao plano tangente $T_{c(t)}S$, e com isso a derivada do campo vetorial V não é uma noção da geometria intrínseca da superfície S . Ao invés de buscarmos um espaço maior que contenha esses “vetores-aceleração” aproveitamos o próprio espaço tangente. Consideramos em vez da derivada padrão $\frac{dV}{dt}$ a derivada covariante $\frac{DV}{dt}$ que é a projeção ortogonal da derivada $\frac{dV}{dt}$ sobre o plano tangente $T_{c(t)}S$.

O mais importante da derivada covariante é que ela só depende da primeira forma fundamental de S [1], por isso podemos usar esse conceito em variedade riemannianas. Além disso, a noção de derivadas covariantes nos garante mais resultados como a noção de velocidade e aceleração. Para isso precisamos definir uma noção de derivação de campos de vetores com certas propriedades, as chamadas conexões afins. Essas serão tratadas nesse capítulo.

4.1 Conexões afins

Antes de definirmos o que é uma conexão afim, comecemos indicando por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 4.1: Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação,

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 4.1: Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ a outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .
3. Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Observação: A igualdade $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$ da proposição 4.1 faz sentido, visto que $\nabla_X Y(p)$ depende exclusivamente do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p .

Com a parte 3 da proposição 4.1 podemos mostrar que a conexão afim é um conceito local. De fato, escolhendo em torno de p um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) e escrevendo,

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i (y_j) X_j. \end{aligned}$$

Expressando $\nabla_{X_i} X_j$ como $\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluímos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

o que prova que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p), y_j(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X .

A proposição acima nos mostra que com a escolha de uma conexão afim em M temos uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas, em especial podemos falar de aceleração de uma curva de M . Geometricamente, podemos interpretar a conexão afim num ponto $p \in M$ como sendo a taxa de variação de um campo Y num ponto p ao longo de uma curva $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $c(0) = p$ e $\frac{dc}{dt}(0) = X(p)$.

Demonstração da proposição 4.1: Para provar a unicidade suponhamos que exista uma correspondência que satisfaça às três propriedades da proposição 4.1. Sejam

$x : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas com $c(I) \cap x(U) \neq \emptyset$ e $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$, $t \in I$. Fazendo $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, podemos expressar o campo V localmente por $V = \sum_j v^j X_j$, $j = 1, \dots, n$, onde $v^j = v^j(t)$ e $X_j = X_j(c(t))$.

Pelas propriedades 1 e 2, temos:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Pela propriedade 3 e 1 da definição de conexão afim 4.1,

$$\begin{aligned} \frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{dc/dt} X_j = \nabla_{(\sum \frac{dx_i}{dt} X_i)} X_j \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j. \quad (4.1)$$

A igualdade 4.1 nos mostra que caso exista uma correspondência satisfazendo as propriedades da proposição 4.1 então ela é única.

Agora para provar a existência, defina $\frac{DV}{dt}$ em $x(U)$ pela última igualdade. As propriedades desejadas são de verificação imediata e caso exista $y(W)$ outra vizinhança coordenada de modo que $x(U) \cap y(W) \neq \emptyset$ definimos $\frac{DV}{dt}$ em $y(W)$ da mesma forma. As definições coincidem na interseção $x(U) \cap y(W)$ pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$ em $x(U)$. Podemos então estender a definição em toda a variedade M , isso conclui a demonstração.

□

Definição 4.2: Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva. $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 4.2 (Transporte paralelo): Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (isto é $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$. $V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c .

Demonstração da proposição 4.2: Admita que a proposição tenha sido provado para o caso em que $c(I)$ está contido na vizinhança coordenada. Por compacidade, dado $t_1 \in I$, o segmento $c([t_0, t_1]) \subset M$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças de coordenadas, onde V é definido pela hipótese. Por unicidade, a definição é consistente nas interseções não vazias, permitindo que V seja definido ao longo de todo $[t_0, t_1]$.

Precisamos, portanto, provar o teorema quando $c(I)$ estiver contido em uma vizinhança coordenada $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em torno de $c(I)$. Seja $x^{-1}(c(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$ e $V_0 = \sum_j v_0^j X_j$, onde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t_0))$.

Suponha a existência um campo vetorial V em $x(U)$ que é paralelo ao longo de c com $V(t_0) = V_0$. Então $V = \sum_j v^j X_j$ satisfaz:

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j.$$

Tomando $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, e substituindo j por k na primeira soma, temos:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} v^j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} X_k = 0.$$

O sistema,

$$0 = \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt}, \quad k = 1, \dots, n,$$

com n equações diferenciais em $v^k(t)$ possui uma única solução, a qual satisfaz $v^k(t_0) = v_0^k$. Então, segue-se que, caso exista V ele é único. Mais que isso, já que o sistema é linear, a solução está definida para todo $t \in I$, o que comprova a existência de um único V que satisfaça as propriedades desejadas.

□

4.2 Conexão Riemanniana

Definição 4.3: Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c , tivermos $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$.

O motivo de definirmos as conexões compatíveis é justificado pela próxima proposição a qual mostra que se a conexão ∇ for compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então é possível usar a “regra do produto” usual para diferenciar o produto interno.

Proposição 4.3: Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se:

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I.$$

Demonstração da proposição 4.3: A volta é imediata, visto que é claro que a equação acima implica que a conexão ∇ é compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Provaremos, portanto, a ida.

Considere $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$ uma base ortonormal de $T_{c(t_0)}(M)$. Com auxí-

lio da proposição do transporte paralelo 4.2 podemos estender paralelamente os vetores $P_i(t_0)$, $i = 1, \dots, n$, ao longo de c . Como ∇ é compatível com a métrica, $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{c(t)}(M)$, para qualquer $t \in I$. Consequentemente, podemos escrever,

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Onde v^i e w^i são funções diferenciáveis em I .

Segue-se então que,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle &= \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i v^i w^i \right\} = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.1: Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Demonstração do corolário 4.1: Suponha que a conexão ∇ seja compatível com a métrica. Sejam $p \in M$ e $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$ e $\frac{dc}{dt} \Big|_{t=t_0} = X(p)$. Então,

$$X(p) \langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle \Big|_{t=t_0} = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle_p.$$

Como p é arbitrário, vale:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

A volta é evidente.

□

Definição 4.4: Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

Teorema 4.1 (Levi-Civita): Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:

1. ∇ é simétrica.
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração do teorema 4.1: Inicialmente suponha a existência de uma tal conexão afim ∇ . Então,

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (4.2)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (4.3)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (4.4)$$

Somando as equações 4.2, 4.3 e subtraindo 4.4, temos, pela simetria de ∇ , que:

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sendo assim, a conexão afim ∇ é única. Para demonstrar a existência de ∇ basta defini-la por 4.5. É fácil verificar que ∇ está bem definida e satisfaz as condições desejadas. □

Para finalizar esse capítulo analisaremos o que fizemos acima em um sistema de coordenadas (U, x) . As funções Γ_{ij}^k definidas em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os conhecidos símbolos de Christoffel da conexão.

Da equação 4.5, tomando $Z = X_k$ e $\nabla_Y X = \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l$ temos por um lado,

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \left\langle X_k, \sum_l \Gamma_{ij}^l X_l \right\rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^k \langle X_k, X_l \rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}.$$

Por outro:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right)$$

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa, denotada por (g^{km}) , temos:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km}.$$

Em termos da notação de Christoffel, a derivada covariante tem a expressão clássica

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k.$$

que vem de (1). Observe que $\frac{DV}{dt}$ difere da derivada usual no espaço euclidiano em termos que envolvem a notação de Christoffel. Para o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , teremos $\Gamma_{ij}^m = 0$. Portanto, no espaço euclidiano, a derivada covariante é consistente com a derivada usual.

Geodésicas

5.1 Fluxo geodésico em variedades

Definição 5.1: Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ para todo $t \in I$. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Por se tratar de uma curva, assim como no capítulo passado, por vezes chamaremos a imagem da geodésica γ como sendo a própria geodésica.

Uma propriedade bastante útil, que vem da definição de geodésica, é que se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, implica que vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ tem comprimento constante. De fato,

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

Desconsideraremos os casos em que $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = c = 0$. Fazendo isso, excluimos as geodésicas que são pontos na variedade M .

O comprimento de arco s de γ , a partir de um ponto $t = t_0$, é dado por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando ocorrer $c = 1$, ou seja, $s(t) = t - t_0$ diremos que a geodésica está normalizada (ou parametrizada pelo comprimento de arco).

Determinemos as equações satisfeitas pelas geodésicas localmente. Seja (U, x) um sistema de coordenadas em torno de $\gamma(t_0)$. Em U a curva γ , dada por,

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

é uma geodésica se e só se,

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Como $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ é uma base, temos o sistema de n equações diferenciais de 2ª ordem,

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (5.1)$$

Para estudarmos o sistema acima, é conveniente considerar o fibrado tangente TM , definido em 2.2.1.

O fibrado tangente de M , TM é o conjunto dos pares (q, v) , $q \in M, v \in T_q M$. Se (U, x) é um sistema de coordenadas em $q \in M$, então qualquer vetor v em $T_q M$, pode ser expresso como $v = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Localmente, o fibrado tangente pode ser visto como o produto $TU = U \times \mathbb{R}^n$. Além disso, a projeção canônica $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(q, v) = q$ é diferenciável.

Qualquer curva diferenciável $t \rightarrow \gamma(t)$ em M determina uma curva $t \rightarrow (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))$ em TM . Se γ é uma geodésica, então, em TU , a curva:

$$t \rightarrow \left(x_1(t), \dots, x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t) \right)$$

satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (5.2)$$

em coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ de TU . Localmente o sistema nos diz que dado um ponto $p \in x(U)$ e um vetor tangente $v \in T_p M$, existe localmente uma única geodésica que passa por p com velocidade v . Sendo assim, o sistema de segunda ordem 5.1 em U é equivalente ao de primeira ordem 5.2 em TU .

Recordemos o seguinte resultado de equações diferenciais.

Teorema 5.1: Se X é um campo C^∞ num aberto V de uma variedade M e $p \in V$ então existem um aberto $V_0 \subset V, p \in V_0$, um número $\delta > 0$, e uma aplicação $C^\infty, \varphi : (-\delta, \delta) \times V_0 \rightarrow V$ tais que a curva $t \rightarrow \varphi(t, q), t \in (-\delta, \delta)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q , para cada $q \in V_0$.

Lema 5.1: Existe um único campo G em TM cujas trajetórias são da forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$, onde γ é uma geodésica em M .

Demonstração do lema 5.1: A demonstração é uma consequência imediata do teorema de existência e unicidade aplicado ao sistema 5.2.

□

Definição 5.2: O campo vetorial G definido acima é chamado campo geodésico em TM e seu fluxo é chamado fluxo geodésico em TM .

Aplicando o teorema anterior ao campo G no ponto $(p, 0) \in TM$, obtemos a seguinte propriedade:

Para cada $p \in M$ existem um aberto \mathcal{U} em TU , onde (U, x) é um sistema de coordenadas em p e $(p, 0) \in \mathcal{U}$, um número $\delta > 0$ e uma aplicação $C^\infty, \varphi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow TU$, tais que: $t \rightarrow \varphi(t, q, v)$ é a única trajetória de G que satisfaz à condição inicial $\varphi(0, q, v) = (q, v)$, para cada $(q, v) \in \mathcal{U}$.

É possível escrever \mathcal{U} como:

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V \text{ e } v \in T_qM \text{ com } |v| < \varepsilon_1\}$$

onde $V \subset U$ é uma vizinhança de $p \in M$. Fazendo $\gamma = \pi \circ \varphi$, onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica, podemos escrever o resultado anterior do seguinte modo.

Proposição 5.1: Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M, p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ e uma aplicação C^∞ ,

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM, |v| < \varepsilon_1\},$$

tais que a curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v), t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$ com $|v| < \varepsilon_1$.

A proposição garante que se $|v| < \varepsilon_1$ existe uma única geodésica $\gamma(t, q, v)$ no intervalo $(-\delta, \delta)$. O próximo lema nos diz que podemos aumentar esse intervalo, diminuindo a velocidade da geodésica, ou podemos aumentar sua velocidade diminuindo o intervalo.

Lema 5.2 (Homogeneidade de uma geodésica): Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ estiver definida num intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av), a > 0$, está definida num intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e vale:

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Demonstração do lema 5.2: Seja $h : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M$ uma curva dada por $h(t) = \gamma(at, q, v)$. Então $h(0) = q$ e $\frac{dh}{dt}(0) = av$. Além disso, como $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$,

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{dh}{dt} \right) = \nabla_{h'(t)} h'(t) = a^2 \nabla_{\gamma'(at, q, v)} \gamma'(at, q, v) = 0,$$

onde, na primeira igualdade, estendemos $h'(t)$ a uma vizinhança de $h(t)$ em M . Dessa forma, h é uma geodésica que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade av . Pela unicidade de trajetórias:

$$h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av).$$

□

Podemos combinar a proposição 5.1 com o lema da homogeneidade obtendo o seguinte resultado.

Proposição 5.2: Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ , $\gamma : (-2,2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$, $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_qM, |w| < \varepsilon\}$ tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2,2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_qM$, com $|w| < \varepsilon$.

Demonstração da proposição 5.2: A geodésica $\gamma(t, q, v)$ da proposição 5.1 está definida para $|t| < \delta$ e para $|v| < \varepsilon_p$. Conforme o lema da homogeneidade, $\gamma(t, q, \frac{\delta v}{2})$ está definida para $|t| < 2$. Tome $\varepsilon < \frac{\delta \varepsilon_p}{2}$, assim obtendo que a geodésica $\gamma(t, q, w)$ está definida para $|t| < 2$ e $|w| < \varepsilon$.

□

A proposição nos permite fazer o intervalo de definição uniformemente grande numa vizinhança de p e com um pensamento análogo podemos fazer a velocidade de uma geodésica uniformemente alta em uma vizinhança de p . Além disso, ela nos permite estabelecer o conceito de aplicação exponencial, como se segue.

Definição 5.3 (Aplicação exponencial): Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela Proposição 5.2. Então a aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por:

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), \quad (q, v) \in \mathcal{U}$$

é chamada a aplicação exponencial em \mathcal{U} .

Geralmente, utilizamos a \exp restrito a um subconjunto aberto do espaço T_qM , isto é, definimos:

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$. É de fácil verificação que \exp_q é diferenciável e que $\exp_q(0) = q$. (Aqui e doravante, $B_\varepsilon(0)$ denotará uma bola aberta de centro na origem 0 de T_qM de raio ε).

Proposição 5.3: Dado $q \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M .

Demonstração da proposição 5.3: Basta calcularmos $d(\exp_q)_0$:

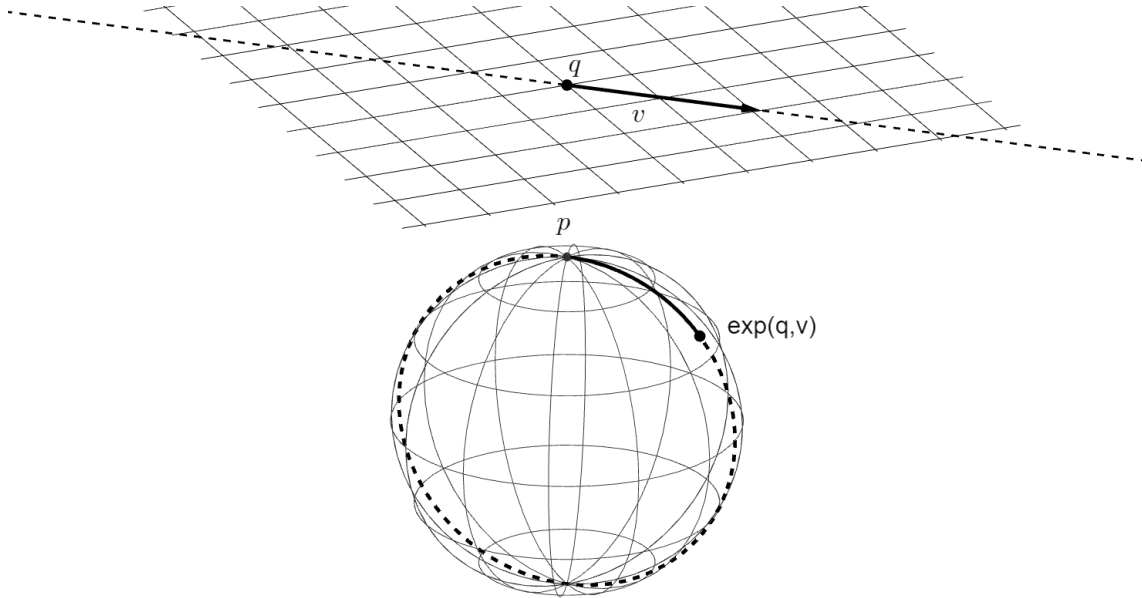
$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(v) &= \left. \frac{d}{dt}(\exp_q(tv)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) \right|_{t=0} = v. \end{aligned}$$

Então $d(\exp_q)_0$ é a identidade de T_qM , e conforme o teorema da função inversa, \exp_q é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0.

□

Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido andando um comprimento $|v|$, partindo de q , ao longo de uma geodésica que passa por q com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Figura 5.1: $\exp(q, v)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 5.1.1: No caso de $M = \mathbb{R}^n$, a derivada covariante coincide com a usual. Assim, as geodésicas são as retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco. A exponencial é a identidade. (Utilizando a identificação usual do espaço tangente a \mathbb{R}^n em p com \mathbb{R}^n .)

5.2 Propriedades minimizantes

Definição 5.4: Chamamos de curva diferenciável por partes uma aplicação contínua $c : [a, b] \rightarrow M$ de um intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ em M que satisfaz a seguinte condição:

- Existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a, b]$ de modo que as restrições $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k-1$, são diferenciáveis.

Dizemos que c liga os pontos $c(a)$ e $c(b)$. Chamamos $c(t_i)$ de vértice de c , e o ângulo formado por $\lim_{t \rightarrow t_i^+} c'(t)$ com $\lim_{t \rightarrow t_i^-} c'(t)$ é chamado o ângulo do vértice $c(t_i)$; aqui $\lim_{t \rightarrow t_i^+} \left(\lim_{t \rightarrow t_i^-} \right)$ significa que t está se aproximando de t_i por valores maiores (menores) que t_i .

Definição 5.5: Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado minimizante se $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$, onde $\ell(\cdot)$ indica o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Para a prova do lema de Gauss, apresentada a seguir, precisaremos da seguinte definição e terminologias.

Definição 5.6: Seja A um conjunto conexo de \mathbb{R}^2 com $A \subset U$ aberto em \mathbb{R}^2 e tal que a fronteira ∂A de A seja uma curva diferenciável por partes com ângulos dos vértices distintos de π . Uma superfície parametrizada em M é uma aplicação diferenciável $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$.

Observação: Note que dizer que s é diferenciável em A é equivalente a dizer que existe um $U \supset A$ aberto onde s é diferenciável estendido. A condição do ângulo do vértice de A é necessária para que a diferencial de s não dependa da extensão considerada.

Sejam (u, v) as coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^2 . Para um v_0 fixo, a aplicação $u \rightarrow s(u, v_0)$, onde u pertence à uma componente conexa de $A \cap \{v = v_0\}$, é uma curva em M e $ds\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ (usamos $\frac{\partial s}{\partial u}$), é um campo vetorial ao longo desta curva. Isso define $\frac{\partial s}{\partial u}$ para todos $(u, v) \in A$ e $\frac{\partial s}{\partial u}$ é um campo vetorial sobre s . Da mesma forma, $\frac{\partial s}{\partial v}$ é definido.

Se V for um campo ao longo de $s : A \rightarrow M$, definimos as derivadas covariantes $\frac{DV}{\partial u}$ e $\frac{DV}{\partial v}$ como se segue $\frac{DV}{\partial u}(u, v_0)$ é a derivada covariante ao longo da curva $u \rightarrow s(u, v_0)$ de V restrito a curva. Isso define $\frac{DV}{\partial u}(u, v)$ para todo $(u, v) \in A$. Da mesma forma, $\frac{DV}{\partial v}$ é definido.

Lema 5.3 (Simetria): Se M é uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e $s : A \rightarrow M$ é uma superfície parametrizada então:

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v}.$$

Demonstração do lema 5.3: Seja $x : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança de um ponto de $s(A)$. Podemos escrever:

$$x^{-1} \circ s(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v)).$$

Então, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial u} \right) &= \frac{D}{\partial v} \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \nabla_{\sum_j (\partial x_j / \partial v) \partial / \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \nabla_{\partial / \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Pela simetria da conexão, $\nabla_{\partial / \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\partial / \partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$. Quando calculamos $\frac{D}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)$ obtemos a mesma expressão encontrada acima, logo o lema está provado.

□

Lema 5.4 (Lema de Gauss): Sejam $p \in M$ e $v \in T_p M$ tal que $\exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_p M \approx T_v(T_p M)$. Então:

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Demonstração do lema 5.4: Seja $w = w_T + w_N$, onde w_T é paralelo a v e w_N é normal a v .

Suponha que $w = 0w_n + aw_T = av$. Então:

$$\langle d(\exp_p)_v v, d(\exp_p)_v av \rangle = a \langle d(\exp_p)_v v, d(\exp_p)_v v \rangle$$

Tome $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$ como:

$$\alpha(t) = tv + v = (1+t)v$$

Então,

$$\begin{aligned} d(\exp_p)_v v &= \frac{d}{dt} (\exp_p(\alpha(t)))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma(1, p, (1+t)v))|_{t=0} \\ &= \gamma'(1), \text{ Como } \|\gamma'(1)\| = \|\gamma'(0)\| = \|v\|. \end{aligned}$$

Como $d \exp_p$ é linear e utilizando a definição de \exp_p , basta provar para $w = w_N$:

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w_T) \rangle = \langle v, w_T \rangle.$$

Podemos supor que $w_N \neq 0$.

Como $\exp_p v$ está definida, existe $\varepsilon > 0$ tal que, $\exp_p u$ está definida para,

$$u = tv(s), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad -\varepsilon < s < \varepsilon,$$

onde $v(s)$ é uma curva em $T_p M$ com $v(0) = v$, $v'(0) = w_N$ e $|v(s)| = \text{const.}$.

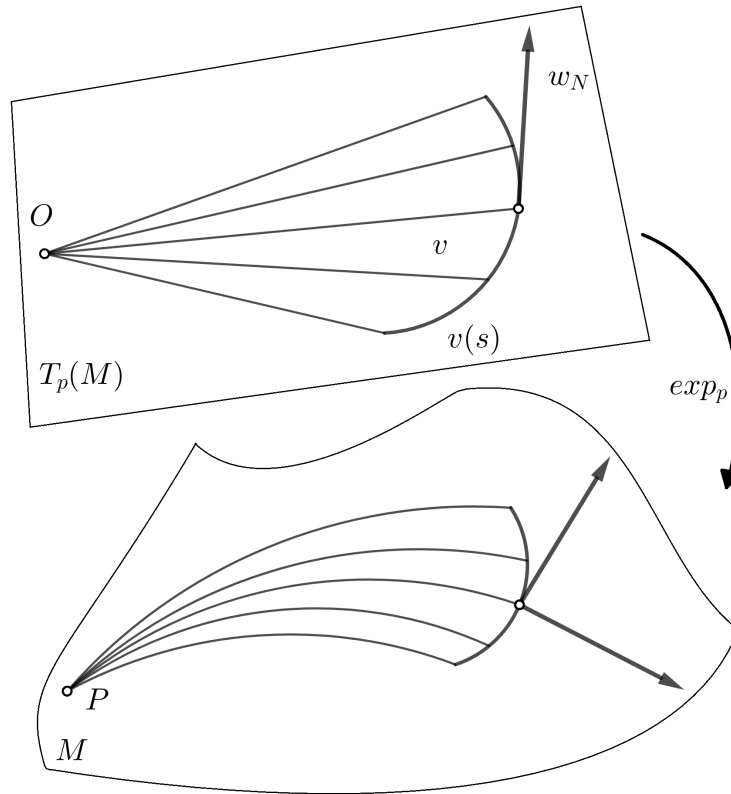
Podemos, portanto, considerar a superfície parametrizada:

$$f : A \rightarrow M, \quad A = \{(t, s); 0 < t < 1, -\varepsilon < s < \varepsilon\}.$$

dada por,

$$f(t, s) = \exp_p tv(s).$$

Observe que as curvas $t \rightarrow f(t, s_0)$ são geodésicas.

Figura 5.2: \exp_p .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para provarmos a equação desejada para $w = w_N$, observamos primeiro que:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle (1,0) = \langle (d \exp_p)_v (w_N), (d \exp_p)_v (v) \rangle. \quad (5.3)$$

Mais ainda, para todo (t, s) , temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D \partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D \partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle.$$

O último termo da expressão acima é zero, pois $\frac{\partial f}{\partial t}$ é o vetor tangente de uma geodésica. Pela simetria da conexão, o primeiro termo da soma se transforma em:

$$\left\langle \frac{D \partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D \partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Segue daí que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ é independente de t . Como:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial s} (t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} (d \exp_p)_{tv} t w_N = 0$$

concluimos que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle (1,0) = 0$, o que com a igualdade 5.3 encerra a demonstração do lema.

□

Definição 5.7: Se \exp_p é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em T_pM então $\exp_p V = U$ é chamada uma vizinhança normal de p . Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ a bola normal (ou geodésica) de centro p e raio ε . As geodésicas em $B_\varepsilon(p)$ que partem de p são chamadas geodésicas radiais.

Proposição 5.4: Sejam $p \in M, U$ uma vizinhança normal de p , e $B \subset U$ uma bola normal de centro p . Seja $\gamma : [0,1] \rightarrow B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0,1] \rightarrow M$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ então $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ e se a igualdade vale então $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.

Demonstração da proposição 5.4: Primeiro assumimos que $c([0,1]) \subset B$. Como \exp_p é um difeomorfismo em U , $c(t), t \neq 0$ pode ser escrito exclusivamente como $\exp_p(r(t) \cdot v(t)) = f(r(t), t)$ onde $t \rightarrow v(t)$ é a curva em T_pM com $|v(t)| = 1$ e $r : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva diferencial por partes (podemos supor que se $t_1 \in (0,1]$ então $c(t_1) \neq p$; caso contrário, deixaríamos o intervalo $[0, t_1)$). Logo, exceto para um número finito de pontos,

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Utilizando do lema de Gauss, $\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0$. Como $|\frac{\partial f}{\partial r}| = 1$:

$$\left| \frac{dc}{dt} \right|^2 = |r'(t)|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 \geq |r'(t)|^2,$$

de onde obtemos:

$$\int_\varepsilon^1 \left| \frac{dc}{dt} \right| dt \geq \int_\varepsilon^1 |r'(t)| dt \geq \int_\varepsilon^1 r'(t) dt = r(1) - r(\varepsilon).$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$, pois $r(1) = \ell(\gamma)$.

É claro que se alguma das desigualdades acima forem estritas então:

$$\ell(c) > \ell(\gamma).$$

Logo, se $\ell(c) = \ell(\gamma)$, então $|\frac{\partial f}{\partial t}| = 0$, isto é, $v(t) = \text{const.}$, e $|r'(t)| = r'(t) > 0$. Segue-se daí que c é uma reparametrização monótona de γ , donde $c([0,1]) = \gamma([0,1])$.

Se $c([0,1])$ não está contido em B , consideramos o primeiro ponto $t_1 \in (0,1)$ para o qual $c(t_1)$ pertence à fronteira de B . Se ρ é o raio da bola geodésica B , temos:

$$\ell(c) \geq \ell_{[0,t_1]}(c) \geq \rho > \ell(\gamma).$$

□

É conveniente chamar W como vizinhança totalmente normal de $p \in M$.

Como observaremos no exemplo adiante, a proposição acima não pode ser estendida globalmente (observaremos no exemplo 5.2.1 geodésicas que não minimizam

a distância). Entretanto, se uma curva c é diferenciável por partes e minimiza a distância ela é uma geodésica. Para a demonstração deste fato precisamos de um teorema que não será aqui provado.

Teorema 5.2: Para cada $p \in M$ existem uma vizinhança W de p e um número $\delta > 0$, tais que, para cada $q \in W$, \exp_q é um difeomorfismo em $B_\delta(0) \subset T_q M$ e $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$, isto é, W é vizinhança normal de cada um de seus pontos.

Demonstração do teorema 5.2: A demonstração pode ser encontrada em [1].

□

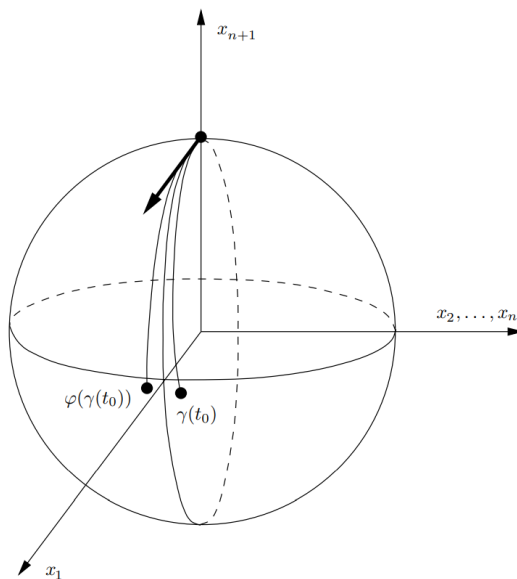
Teorema 5.3: Se uma curva diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, com parâmetro proporcional ao comprimento de arco, tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ então γ é uma geodésica. Em particular γ é regular.

Demonstração do teorema 5.3: Seja $t \in [a, b]$ e W uma vizinhança totalmente normal de $\gamma(t)$. Existe um intervalo fechado $I \subset [a, b]$, o qual seu interior não é vazio, $t \in I$, tal que $\gamma(I) \subset W$; a restrição $\gamma_I : I \rightarrow W$ é uma curva diferenciável por partes conectando dois pontos em uma bola normal. Conforme a hipótese e Proposição 5.4, $\ell(\gamma_I)$ é igual ao comprimento de uma geodésica radial que liga os dois pontos. Também conforme a Proposição 5.4, e pelo fato γ_I ser parametrizado proporcionalmente ao comprimento de arco, γ_I é uma geodésica em I . Mais ainda, é uma geodésica em t .

□

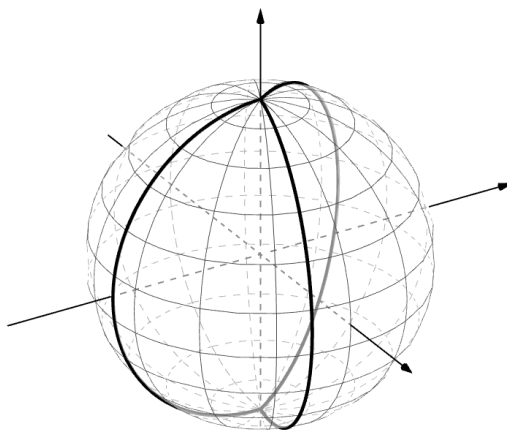
Exemplo 5.2.1 (Geodésicas na esfera): As geodésicas na esfera são os grandes círculos.

Primeiramente, consideremos uma geodésica $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t))$ começando no polo norte N com o vetor tangente v pertencente ao plano formado pelos eixos x_1 e x_{n+1} . Vamos mostrar que a geodésica que parte do polo com direção do vetor v , deve permanecer ao longo do meridiano $x_2 = \dots = x_n = 0$. Suponha que tal afirmação é falsa. Isto é, suponha que exista um t_0 tal que $x_i(t_0) \neq 0$ para algum $2 \leq i \leq n$. A aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que manda x_i para $-x_i$ e deixa as outras coordenadas fixas, é uma isometria da esfera que fixa $N = \gamma(0)$ e $v = \dot{\gamma}(0)$ portanto, leva γ para γ . Mas $\varphi(\gamma(t_0)) \neq \gamma(t_0)$, o que é uma contradição.

Figura 5.3: Geodésicas na esfera são grandes círculos

Fonte: Retirada de [4]

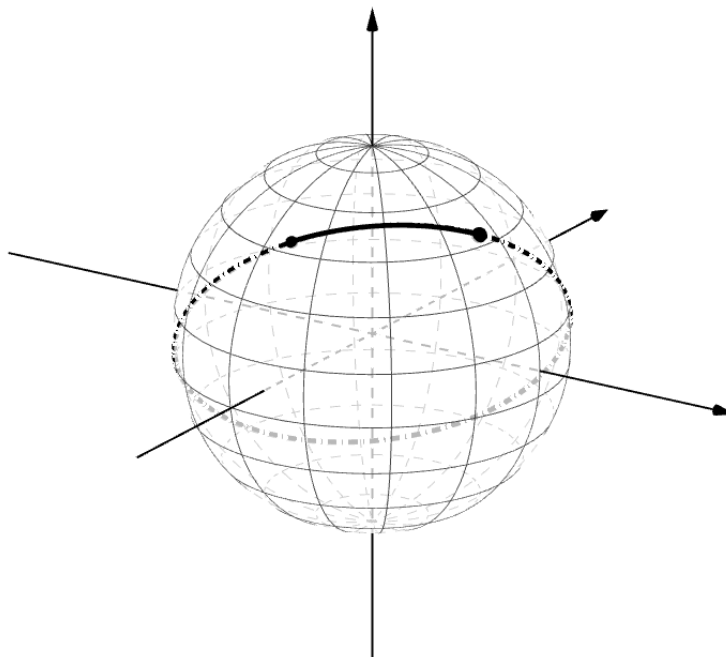
Devido às simetrias da esfera, podemos rotaciona-la de modo a levar qualquer outro ponto ao polo norte e qualquer outro vetor no plano formado pelos eixos x^1 e x^{n+1} concluímos que todas as geodésicas na esfera são grandes círculos.

Figura 5.4: Grandes círculos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, para ligarmos dois pontos na esfera de modo a obter a curva com menor distância, devemos analisar os grandes círculos. Se os pontos são antípodas, existem infinitas geodésicas que os ligam. Caso os pontos não sejam antípodas, há somente um grande círculo que os ligam, existem então duas geodésicas que os ligam, mas somente uma minimiza a distância.

Figura 5.5: Duas geodésicas, ligando pontos não antípodas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 5.2.2 (Um matemático vai à copa): Imagine que você quer fazer uma viagem de Minas ao Catar para assistir à Copa do Mundo de 2022, qual a forma de ir percorrendo a menor distância? Para simplificar o problema, vamos fazer uma aproximação da Terra como sendo a esfera.

Como acabamos de ver, na esfera as geodésicas são os grandes círculos, sendo esses os candidatos a minimizar a distâncias, vamos nos concentrar neles.

Como mencionado, se dois pontos não são antípodas há somente um grande círculo que os liga. Como Minas e o Catar não são antípodas, temos que só há um grande círculo que ligue os dois, como todo grande círculo na esfera é uma geodésica e só os grandes círculos são geodésicas nessa variedade, resta apenas analisar qual dos arcos de circunferência minimiza a distância.

O Teorema de Hopf-Rinow

Neste capítulo as variedades serão conexas, exceto quando mencionado. Vamos estudar agora propriedades globais de uma variedade diferenciável M . Para tal estudo, devemos exigir que M não seja estendível. Geralmente a condição utilizada para assegurar a não-estendibilidade é a compacidade, mas, em alguns casos é possível utilizar de uma condição mais fraca.

Definição 6.1: Uma variedade Riemanniana M é estendível se existe uma variedade Riemanniana M' tal que M é isométrica a um subconjunto próprio aberto de M' . Caso contrário, M é não-estendível.

Como a classe das variedades não-estendíveis é muito grande, analisamos um subconjunto adequado, dado pela definição a seguir.

Definição 6.2: Uma variedade Riemanniana M é dita geodésicamente completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, \exp_p , está definida para todo $v \in T_pM$. Isto significa, que as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Intuitivamente, dizer que uma variedade é geodesicamente completa (ou simplesmente completa), é dizer que a variedade não possui “buracos” e nem bordas.

Exemplo 6.0.1: O \mathbb{R}^n com a métrica canônica é completo, já que a aplicação exponencial é a própria identidade.

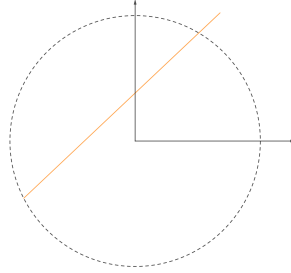
Exemplo 6.0.2: A esfera S^n também é completa, visto que as geodésicas são os grandes círculos. Note que as geodésicas são periódicas.

Exemplo 6.0.3: Variedades completas deixam de ser completas se retirarmos um ponto p dela. Basta olhar para as geodésicas que passavam por tal ponto anteriormente, para algum parâmetro ela não estará definida. Em específico, $\mathbb{R}^n - \{p\}$ e $S^n - \{p\}$ não são variedades completas.

Exemplo 6.0.4: O disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ não é completo com a

métrica euclidiana, dado que as geodésicas não estão definidas para todo parâmetro.

Figura 6.1: Disco D



Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 6.1: Se M é completa então M é não-estendível.

Demonstração da proposição 6.1: Suponha que M é uma subvariedade aberta de M' . Pela conexidade de M' , a fronteira ∂M de M em M' é não vazia. Sejam $p \in \partial M$ e $U' \subset M'$ uma vizinhança normal de p em M' . Seja $q \in U' \cap M$ e $\tilde{\gamma}(t)$ uma geodésica em M' com $\tilde{\gamma}(0) = p$, $\tilde{\gamma}(1) = q$. Então $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$, $|t| < \delta$, é uma geodésica em M com $\gamma(0) = q$. A geodésica γ não está definida para algum $t \leq 1$, o que contradiz o fato de M ser completa.

□

Entretanto, a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 6.0.5: Considere o cone de uma folha dado por:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A variedade S obtida pelo cone menos seu vértice p_0 é regular não-estendível, porém é não completa.

Sabemos que a fronteira de S é dada pelo vértice p_0

Seja \bar{W} a vizinhança de p_0 em \bar{S} , tal que quaisquer dois pontos em \bar{W} possam ser ligados por uma geodésica γ de \bar{S} .

Mostraremos que $\bar{W} - p_0 \subset S$. De fato, os pontos de γ pertencem a S . Por outro lado, um ponto $r \in \bar{W}$ que não faz parte de γ nem nenhuma de suas extensões pode ser ligado a um ponto t de γ , $t \neq p_0$ em que t pertence \bar{W} , por uma geodésica diferente de γ , denotemos essa geodésica por α . Pela primeira observação, todo ponto de α , especialmente r , pertence a S . Por fim, os pontos de extensão de γ , exceto p_0 , também pertencem a S ; caso contrário, pertenceriam à fronteira de S , que sabemos ser constituída somente de p_0 .

É oportuno introduzir o conceito de distância em uma variedade Riemanniana M .

Definição 6.3: A distância $d(p, q)$ é definida por $d(p, q) = \inf\{f_{p,q}; f_{p,q}$ é uma curva diferenciável por partes que liga p a $q\}$

Pelo fato de M ser conexa, existe ao menos uma curva diferencial que liga p a q , basta cobrir uma curva contínua que liga os dois pontos por um número infinito de vizinhanças coordenadas, pela compacidade, podemos cobrir a curva com um número finito de vizinhanças coordenadas, depois substituir cada “pedaço” contido em uma vizinhança coordenada por uma curva diferenciável.

Proposição 6.2: Com a distância d , M é um espaço métrico, isto é:

1. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$,
2. $d(p, q) = d(q, p)$,
3. $d(p, q) \geq 0$, e $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

Demonstração da proposição 6.2: São imediatos da definição de ínfimo os itens 1, 2 e a primeira parte de 3. Restando demonstrar que $d(p, q) \geq 0$, e $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$. Suponha o contrário, tome uma bola normal $B_r(p)$ que não contenha q . Como a distância de p a q é zero, existe uma curva c ligando os pontos com comprimento menor que r . Isso é um absurdo, utilizando o fato que o segmento de c contido em $B_r(p)$ tem comprimento no mínimo r e a proposição 5.4.

Observação: Se existe uma geodésica minimizante γ que liga p a q , então pela definição de geodésicas minimizantes $d(p, q) = \text{comprimento de } \gamma$.

Proposição 6.3: A topologia induzida por d em M coincide com a topologia inicial de M .

Demonstração da proposição 6.3: Se r é suficientemente pequeno, a bola geodésica $B_r(p)$ coincide com a bola métrica de raio r e pela observação acima essas formam uma base da topologia de M .

Corolário 6.1: Se $p_0 \in M$, a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = d(p, p_0)$ é contínua.

Demonstração do corolário 6.1: Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$.

$x \in \beta_\delta(p) \Rightarrow |d(x, p_0) - d(p, p_0)| < \epsilon$. De fato,

Se $d(x, p) < \epsilon$, então,

$$\begin{aligned} d(x, p_0) &\leq d(x, p) + d(p, p_0) \\ d(x, p_0) - d(p, p_0) &\leq d(x, p) < \epsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(p, p_0) &\leq d(p, x) + d(x, p_0) \\ d(p, p_0) &\leq d(x, p) + d(x, p_0) \\ -\epsilon &< -d(x, p) \leq d(x, p_0) - d(p, p_0). \end{aligned}$$

Daí f é contínua.

□

Teorema 6.1 (Hopf e Rinow (HR)): Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- a) \exp_p está definida em todo o T_pM .
- b) Os limitados e fechados de M são compactos.
- c) M é completa como espaço métrico.
- d) M é geodesicamente completa.
- e) Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M, K_n \subset \text{int } K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$ então $d(p, q_n) \rightarrow \infty$. (Onde $\text{int } A$ indica interior de A).

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que,

- f) Para todo $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $\ell(\gamma) = d(p, q)$.

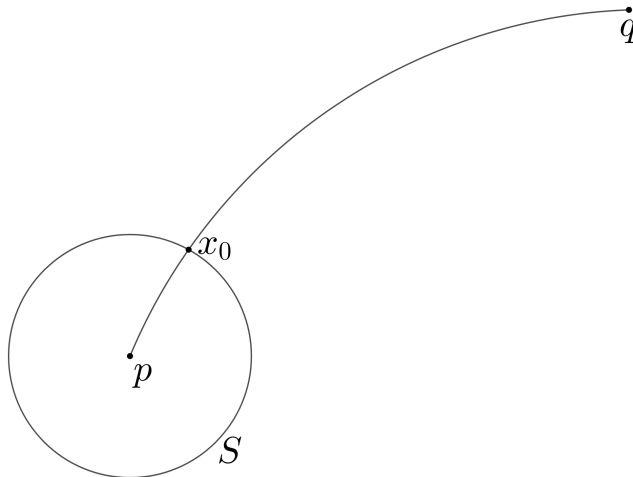
Demonstração do teorema 6.1: a) \Rightarrow f)

Sejam $r = d(p, q)$ e $B_\delta(p)$ uma bola geodésica de raio δ centrada em p . Denotemos $S_\delta(p) = S = \partial B_\delta(p)$ e considere a função,

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = d(x, q),$$

note que f é contínua pelo corolário acima e S é compacto. Seja $x_0 \in S$ um ponto que minimiza f .

Figura 6.2: $B_\delta(p)$



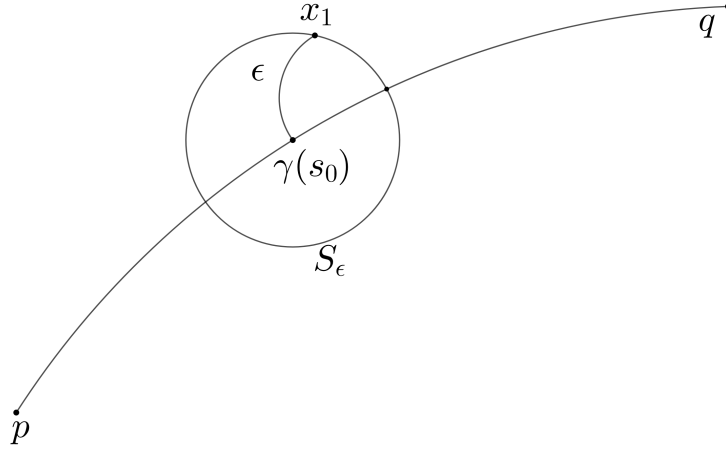
Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja $\gamma(s) = \exp_p(sv)$ a geodésica que parte de p com velocidade $\gamma'(0) = v$. Vamos mostrar que $\gamma(r) = q$.

Seja $A = \{s \in [0, r]; d(\gamma(s), q) = r - s\} \subset [0, r]$. A é fechado e não vazio, pois $s = 0 \in A$, mostraremos que A também é aberto, mais precisamente, vamos provar que se $s_0 \in A$ e $s_0 < r$ então, existe ϵ suficientemente pequeno de modo que $s_0 + \epsilon \in A$.

Considere uma bola geodésica $B_\epsilon(\gamma(s_0))$, e seja $x_1 \in S_\epsilon = \partial B_\epsilon(\gamma(s_0))$ um ponto de mínimo de $d(x, q)$, $x \in S_\epsilon$, ou seja $d(x_1, q) = r - s_0 - \epsilon$.

Figura 6.3: $B_\epsilon(\gamma(s_0))$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos mostrar que o ponto $\gamma(s_0 + \epsilon) = x_1$, ou seja, x_1 está sobre a geodésica. De fato,

$$r = d(p, q) \leq d(p, x_1) + d(x_1, q).$$

Portanto,

$$d(p, x_1) \geq r - (r - s_0 - \epsilon) = s_0 + \epsilon$$

Por outro lado, a curva quebrada que liga p a x_1 , que vai de p a $\gamma(s_0)$ pela geodésica γ e de $\gamma(s_0)$ a x_1 por um raio geodésico, tem comprimento $s_0 + \epsilon$. Portanto,

$$d(p, x_1) \leq s_0 + \epsilon.$$

Logo, $d(p, x_1) = s_0 + \epsilon$. pelo teorema 5.3 tal curva é uma geodésica e mais ainda, é regular e $\gamma(s_0 + \epsilon) = x_1$.

Dessa forma,

$$d(\gamma(s_0), q) = \epsilon + \min_{x \in S_\epsilon} d(x, q) = \epsilon + d(x_1, q),$$

e $d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$, pois $s_0 \in A$. Assim,

$$r - s_0 = \epsilon + d(x_1, q) = \epsilon + d(\gamma(s_0 + \epsilon), q),$$

ou seja,

$$d(\gamma(s_0 + \epsilon), q) = r - (s_0 + \epsilon). \quad \Rightarrow s_0 + \epsilon \in A.$$

Se $A \subset [0, r]$ é aberto, fechado e não vazio, temos que $A = [0, r]$, Assim vale,

$$d(\gamma(r), q) = r - r = 0 \Rightarrow \gamma(r) = q.$$

a) \Rightarrow b)

Seja $A \subset M$ limitado e fechado. Como A é limitado, $A \subset B$, onde B é uma bola na métrica d de centro p .

Pelo item f) existe uma bola $B_r(0) \subset T_p M$ de modo que $B \subset \exp_p \overline{B_r(0)}$. Como a aplicação \exp é contínua, temos que $\exp_p(\overline{B_r(0)})$ é compacto. Como A é um fechado, contido em um compacto, A também será compacto.

b) \Rightarrow c)

Considere $\{p_n\} \subset M$ uma sequência de Cauchy. $\{p_n\}$ é limitado, donde tem fecho compacto pelo item b). Assim $\{p_n\}$ contém uma subsequência convergente e, sendo de Cauchy, temos que $\{p_n\}$ é convergente.

c) \Rightarrow d)

Suponha que M não é geodesicamente completa. Então alguma geodésica normalizada $\gamma : I \rightarrow M$ está definida para $s < s_0$ e não está definida para s_0 . Vamos mostrar que γ se estende além de s_0 .

Seja $\{s_n\} \subset I$ uma sequência convergindo para s_0 com $s_n < s_0$. Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que se $n, m > n_0$ então $|s_n - s_m| < \epsilon$. Então,

$$d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq |s_n - s_m| < \epsilon$$

ou seja, $\{\gamma(s_n)\}$ é de Cauchy em M . Como M é completa na métrica d , $\{\gamma(s_n)\} \rightarrow p_0 \in M$.

Seja (W, δ) uma vizinhança totalmente normal de p_0 . Tome n_1 tal que se $n, m > n_1$, então $|s_m - s_n| < \delta$ e $\gamma(s_n), \gamma(s_m)$ pertencem a W . Logo, existe uma única geodésica β de comprimento menor do que δ ligando $\gamma(s_n)$ a $\gamma(s_m)$. Necessariamente β coincide com γ , onde γ está definida. Como $\exp_{\gamma(s_n)}$ é um difeomorfismo em $B_\delta(0)$ e $\exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0)) \supset W$, β estende γ além de s_0 .

d) \Rightarrow a)

Imediato.

b) \Leftrightarrow e)

Topologia Geral.

□

Corolário 6.2: Se M é compacta então M é completa.

Demonstração do corolário 6.2: Direto do item b).

□

Corolário 6.3: Uma subvariedade fechada de uma variedade Riemanniana completa é completa na métrica induzida; em particular, as subvariedades fechadas de um espaço euclidiano são completas.

Exemplo 6.0.6: Observemos que o item f) do Teorema de Hopf-Rinow 6.1 não implica em nenhum dos outros itens. De fato, basta observar o exemplo 6.0.4 que satisfaz f), mas não satisfaz a).

Uma aplicação direta do Teorema de Hopf-Rinow, é o Teorema de Hadamard, ele só será mencionado, visto que para sua total compreensão e demonstração é necessário estabelecer o conceito de curvatura.

Teorema 6.2 (Hadamard): Seja M uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional $K(p, \sigma) \leq 0$, para todo $p \in M$ e todo $\sigma \subset T_p(M)$. Então M é difeomorfa a \mathbb{R}^n , $n = \dim M$; mais precisamente, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ é um difeomorfismo.

Demonstração do teorema 6.2: A demonstração do teorema, assim como os conceitos necessários para sua compreensão, podem ser encontrados em [1]

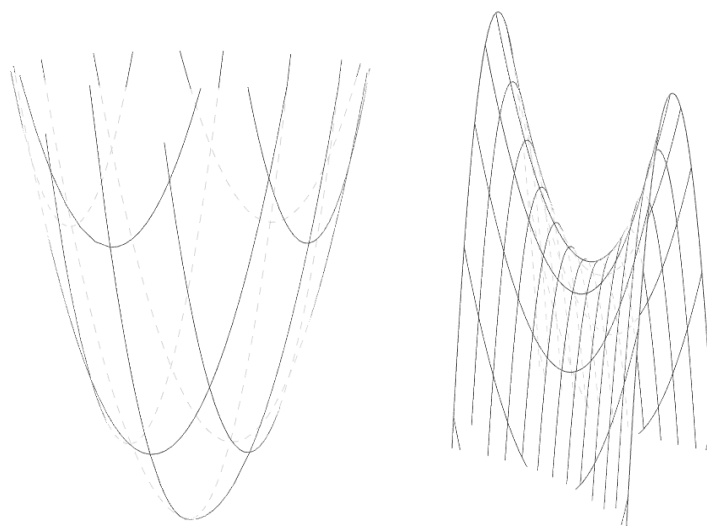
□

Entretanto, podemos olhar mais uma vez para o exemplo do matemático e sua viagem no exemplo 5.2.2.

Exemplo 6.0.7 (Matemático viajante): Com o Teorema de Hopf-Rinow, conseguimos expandir as “formas planetárias” em que conseguimos encontrar uma geodésica que minimiza a distância.

- Como o \mathbb{R}^n é completo, as subvariedades fechadas são completas (corolário 6.3). Em particular, pré imagem de valor regular, como o parabolóide ou o parabolóide hiperbólico (“Sela de Cavalo”).

Figura 6.4: Exemplo de pré imagem de valor regular



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conclusões

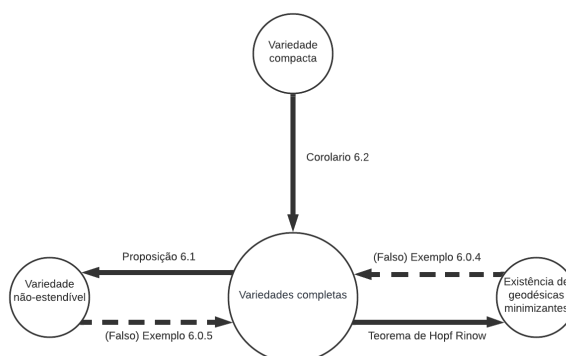
Neste trabalho apresentamos uma demonstração do Teorema de Hopf-Rinow, cujo o nome deriva da dupla de professor/aluno alemã Heinz Hopf e Willi Rinow. Para isso, foi necessário preparar e entender todos os pré-requisitos necessários para seu desenvolvimento, que incluem derivadas covariantes, geodésicas e aplicação exponencial.

A conclusão que pode ser tomada do Teorema de Hopf-Rinow é a equivalência das cinco afirmações citadas e que desde que uma seja verdade, temos que para todo par de pontos p e q de uma variedade, existirá uma geodésica minimizante que os liga. Não só isso, mas atentando-se para a primeira afirmação, temos que se a \exp_p está definida em todo T_pM para algum ponto particular p da variedade, a \exp_p estará definida em todo T_pM para todos os pontos da variedade.

O presente trabalho possibilitou o desenvolvimento e aprofundamento nos tópicos de matemática, em particular a geometria, ao passo que me inseriu na pesquisa científica desta área, desenvolvendo o espírito crítico e científico.

Com os resultados provados e alguns exemplos, construímos o seguinte diagrama.

Figura 7.1: Diagrama de resultados



Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, espero que esta pesquisa ajude a inspirar outros estudiosos em suas pesquisas e que de alguma forma eu contribua em seus conhecimentos.

Bibliografia

- [1] Carmo, M. do. *geometria riemanniana*. IMPA, 2015. URL: <https://books.google.com.br/books?id=52pAQgAACAAJ>.
- [2] Carmo, M. P. do. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos Universitarios. Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. URL: <https://books.google.com.br/books?id=52pAQgAACAAJ>.
- [3] Cavalcante, M. P. *Geometria Riemanniana*. Notas de Aula. URL: https://www.youtube.com/watch?v=1KFbS-ePsdU&list=PLbFWRCXwjKiKlflmoBMNNkKWF2_yso-UT.
- [4] Lee, J. M. *Introduction to Riemannian manifolds*. Springer, 2018.
- [5] Neto, C. A. R. *Uma Introdução à Geometria Riemanniana e a Equação de Yamabe*. UFPB, 2019. URL: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/19231/1/CARN18012021.pdf>.
- [6] Vidigal, C. E. L. *Geodésicas e o Teorema de Hopf-Rinow*. UFMG, 2006. URL: <https://www.mat.ufmg.br/posgrad/wp-content/uploads/2019/04/Mono004.pdf>.
- [7] Weisstein, E. W. *Tractrix*. MathWorld—A Wolfram Web Resource, 2016. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Tractrix.html>.