Universidade Federal de Viçosa
Trabalho de Conclusão de Curso

Ana Carolina Silva Saliba Ribeiro

Números racionais, irracionais e transcendentes

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2022

Ana Carolina Silva Saliba Ribeiro

NÚMEROS RACIONAIS, IRRACIONAIS E TRANSCENDENTES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2022

Ana Carolina Silva Saliba Ribeiro

NÚMEROS RACIONAIS, IRRACIONAIS E TRANSCENDENTES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática, para obter o diploma de licenciado em matemática.

Aprovada: 16 de março de 2022.

Danielle Franco Nicolau

Luiz Gustavo Perona Araújo

Luís Felipe Gonçalves Fonseca
(Orientador)

Agradecimentos

Agradeço à Deus pelo dom da vida. Aos meus pais, Wander e Sueli, por todo apoio, afeto e estrutura necessários durante minha graduação. À minha tia, Fia, por todo incentivo e à toda minha família pelo suporte e pelos momentos felizes.

Ao meu namorado Bruno, por toda compreensão e estímulo.

Ao meu professor e orientador Luís Felipe Gonçalves Fonseca pela sugestão de tema, disposição, compreensão e empenho com este projeto, sempre solícito, me auxiliando em cada etapa; deixo aqui minha gratidão e carinho.

Aos professores Alexandre, Carla, Danielle, Elen Rose, Fernando, Guaraci, Justino, Luís Felipe, Luiz Gustavo, Mehran, Natália e Patrícia Cláudia, que foram parte importante da minha graduação, por todos os ensinamentos e amizade.

Aos meus amigos Michael e Joyce, por dividirem comigo a rotina da faculdade e estarem sempre dispostos a me auxiliar. E, à todos os demais amigos que fiz na UFV, obrigado por terem deixado esse caminho mais leve.

Aos parceiros do Residência Pedagógica, pela vivência e troca de conhecimentos.

Aos professores Danielle e Luiz Gustavo membros da banca.

Enfim, agradeço à todos que em algum momento fizeram parte dessa tragetória, que torceram por mim, me deram um ombro amigo ou uma palavra de carinho. Gratidão por fazerem parte dessa conquista e por tê-los em minha vida.

Resumo

RIBEIRO, Ana Carolina Silva Saliba, Universidade Federal de Viçosa, março de 2022. **Números racionais, irracionais e transcendentes**. Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

Neste trabalho estudaremos os números racionais, irracionais, algébricos e transcendentes. Provaremos a irracionalidade do número de Euler, do número π, alguns números logarítmicos e trigonométricos. Veremos algumas propriedades a respeito dos números algébricos e transcendentes. Estudaremos os números de Liouville e veremos que todo número de Liouville é transcendente. Exibiremos a constante de Liouville e provaremos a sua transcendência. Mostraremos que todo número real pode ser escrito como a soma de dois números de Liouville. Provaremos que a constante de Champernowne é um número transcendente, mas não é de Liouville. E, por último, provaremos as transcendências dos números e e π.

Abstract

RIBEIRO, Ana Carolina Silva Saliba, Universidade Federal de Viçosa, March, 2022. **Rational, irrational and transcendent numbers**. Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

In this work, we will study rational, irrational, algebraic, and transcendent numbers. We will prove the irrationality of the Euler number, number π, and some logarithmic and trigonometric numbers. Furthermore, some properties that concern algebraic and transcendent numbers will be investigated. Moreover, we will study the Liouville numbers and prove that every Liouville number is transcendent by displaying the Liouville constant and proving its transcendence. Additionally, we will show that every real number can be decomposed into a sum of two Liouville numbers. We will prove that the Champernowne constant is a transcendent number but not a Liouville number. Finally, we will prove the transcendence of the numbers e and π.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N} - 0$
$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z} - 0$
$\mid$	Divide
$\nmid$	Não divide
$mdc(a,b)$	Máximo divisor comum entre a e b

Sumário

1

Introdução

A teoria dos números é um dos ramos mais antigos da matemática. A necessidade em lidar com os números está presente desde os primeiros povos que habitaram o planeta Terra. Muitos dos problemas que compõem esse tema foram derivados de questões místicas, que não envolvem tantas considerações de caráter científico.

Um dos objetivos deste projeto é estudar a irracionalidade de alguns números reais, como o π, o número de Euler (e), alguns números trigonométricos e logarítmicos. Estudar questões operacionais que dizem respeito aos números racionais, irracionais, algébricos e transcendentes. E, por último, explorar as transcendências dos números e e π.

Este trabalho será estruturado em 9 capítulos, dos quais o próximo, para melhor aproveitamento da obra, trará conceitos e resultados básicos dos campos da aritmética, análise, álgebra linear, variáveis complexas e polinômios simétricos. Estes serão fundamentais para o entendimento dos demais capítulos.

O terceiro capítulo desde trabalho será destinado ao números racionais e irracionais.

Embora os povos egípcios e babilônios, por volta do ano 2000 a.C., utilizassem das frações e as representassem por diversos símbolos, foram os gregos, por volta do ano 1000 d.C., quem deram a elas uma maior importância na matemática, tornando as frações uma das principais ferramentas em seus estudos. Não obstante a isso, Pitágoras, por volta do ano 500 a.C., acreditava que tudo no mundo podia ser expresso através dos números racionais.

Também nesse capítulo, veremos que os racionais formam um conjunto denso, isso significa que eles estão "por todo lugar na reta númerica", independente do tamanho do segmento escolhido.

Os pitagóricos foram os grandes responsáveis por mostrar que apesar da densidade dos racionais, eles deixavam alguns espaços ao longo da reta numérica. Essa descoberta se deu com o teorema de Pitágoras. Ao utilizá-lo para calcular a diagonal de um quadrado de lado um, observaram que o resultado, igual a raiz quadrada de 2, $\sqrt{2}$, podia ser construído com régua e compasso, mas não se igualava a nenhum número racional. O novo conjunto numérico que surgia foi chamado de conjunto dos números irracionais, que junto aos racionais formariam o conjunto dos números reais.

Ainda no capítulo 3, veremos a irracionalidade de alguns números irracionais, sendo eles, as notáveis constantes matemáticas π e e, alguns números logarítmicos e trigonométricos.

No capítulo que segue, veremos uma outra forma de representar o conjunto dos números reais, sendo em algébricos reais e transcendentes reais. Veremos que um número x é dito algébrico se satisfaz uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Não é difícil observar que todos os racionais são algébricos e satisfazem uma equação algébrica com coeficientes inteiros de grau um. Podemos observar também que alguns irracionais também se caracterizam como algébricos, como é o caso do número $\sqrt{2}$, que é solução da equação $x^2 - 2 = 0$. Se um número não satisfaz uma equação polinomial com coeficientes inteiros, dizemos que o mesmo é um número transcendente.

Se a teoria dos números advém de muitos anos, a teoria dos números transcendentes foi originada por Joseph Liouville em 1844, no qual o mesmo mostrou a existência dos números transcendentes e explicitou os primeiros exemplos. A esses números damos o nome de números de Liouville. Veremos os números de Liouville no capítulo 5 deste trabalho.

No capítulo 6, estudaremos a constante de Champernowne, provaremos sua transcendência, porém veremos que ela não se caracteriza como um número de Liouville.

No penúltimo capítulo deste trabalho, provaremos a transcendência do número de Euler, constante esta a qual sua história caminha ao lado de outro importante objeto matemático, os logaritmos. Este último surgiu como uma forma menos trabalhosa de fazer cálculos, enquanto que, o número de Euler, foi obtido pela primeira vez por Leonhard Euler ao calcular o limite da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que aparecia na fórmula de juros compostos.

Por fim, traremos no último capítulo deste trabalho, a transcendência do π, o número mais famoso da história da matemática. Ao contrário do e, o número π não possui uma série tão bem comportada e sua irracionalidade foi demonstrada pela primeira vez por Johann Heinrich Lambert, em 1761.

Assim, finalizamos uma pequena amostra do que será apresentado nesse trabalho, venha se aventurar nas próximas páginas.

2

Noções Básicas

Neste capítulo, abordaremos alguns conceitos sobre aritmética, algébra linear, análise, variáveis complexas e polinômios simétricos que serão importantes para a compreensão deste trabalho.

Para o desenvolvimento deste capítulo, foram utilizadas as referências [3], [4], [6], [7], [10], [17]; nas quais poderão ser encontradas, com detalhes, as respectivas demonstrações dos itens aqui abordados.

2.1 Aritmética

Sejam a e b inteiros. Dizemos que b divide a, ou ainda que b é um divisor de a, se existe um inteiro c tal que $bc = a$. A definição de divisibilidade é fundamental para compreensão de número primo, números estes que, para a teoria dos números, desempenham um papel semelhante ao dos átomos na estrutura da matéria, pois todo inteiro maior do que 1 é primo ou se escreve como o produto de primos.

2.1.1 Máximo divisor comum

Definição 2.1: Sejam a e b dois inteiros não nulos. O conjunto dos divisores comuns de a e b é denotado por $D(a, b)$. O máximo divisor comum de a e b é definido por:

$$mdc(a,b) = maxD(a,b).$$

Teorema 2.1: Sejam a e b dois inteiros não nulos. Um inteiro positivo d é o máximo divisor comum de a e b se, e somente se, verifica-se:

1. $d|a$ e $d|b$.

2. Se existe $d' \in \mathbb{Z}$ tal que $d'|a$ e $d'|b$, então $d'|d$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3], página 67.

2.1.2 Números primos e o teorema fundamental da aritmética

Definição 2.2: Um número $p > 1$ é primo quando seus únicos divisores positivos são 1 e p.

Proposição 2.1: Seja p um número primo e sejam a e b inteiros.

1. Se $p \nmid a$, então $mdc(p, a) = 1$.

2. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Definição 2.3: Dois inteiros a e b dizem-se primos entre si quando $mdc(a, b) = 1$.

Exemplo 2.1.1: Os números 4 e 9; 15 e 22 são primos entre si pois, o único divisor comum entre cada par é 1. Em contrapartida, os números 9 e 21 não são primos entre si pois, o máximo divisor comum entre eles é o número 3.

Corolário 2.1: Se um número primo p divide um produto $a_1a_2...a_3$, então $p|a_k$, para algum k; $1 \leq k \leq n$.

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental da Aritmética): Seja $m > 1$ um inteiro. Existem números primos $p_1, ..., p_n$ com $p_1 < ... < p_n$ e $n \geq 1$ inteiro; e inteiros não negativos $\alpha_1, ..., \alpha_n$, tais que $m = p_1^{\alpha_1}, ..., p_n^{\alpha_n}$.

Os inteiros $p_1, ..., p_n$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n$ são univocamente determinados.

As demonstrações que correspondem à proposição 2.1, ao corolário 2.1 e ao teorema 2.2 dessa subseção podem ser encontradas em [3], entre as páginas 78 e 82.

2.1.3 Uma propriedade dos racionais

Se a e b são números inteiros com $b \neq 0$, a equação $bx = a$ nem sempre tem solução em $\mathbb{Z}$.

A necessidade de novos números foi vivenciada muito precocemente na história da matemática. Desde os egípcios, as frações de numerador 1 já eram empregadas; as demais, eram compostas pela soma de frações com numerador igual a 1.

Teorema 2.3: Seja $c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_2x^2 + c_1x + c_0$ uma equação polinomial qualquer com coeficientes inteiros. Se esta equação tiver uma raiz racional $\frac{a}{b}$, em que $\frac{a}{b}$ é um fração irredutível, então a será divisor de c_0 e b um divisor de c_n.

Podemos observar esse resultado considerando o polinômio $2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = 0$ em que suas raízes são $-3, -2, \frac{1}{2}$, e 2.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7], página 140.

2.2 Álgebra linear

Os espaços vetoriais são os principais objetos de estudo da álgebra linear. Podemos definir um espaço vetorial como um conjunto não vazio V sobre $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, em que em seus elementos, denominados vetores, estão definidas as seguintes operações:

1. A cada par u, v de vetores de V corresponde um vetor $u + v \in V$, chamado de soma de u e v, de modo que são válidas:

   - **Propriedade comutativa:** $u + v = v + u$, para $u, v \in V$.

- **Propriedade associativa:** $(u+v)+w = u+(v+w)$, para todos $u, v, w \in V$.
- **Existência do elemento neutro da adição:** Existe 0, tal que $0 + v = v$, para todo $v \in V$.
- **Existência do elemento simétrico:** Existe $-v$, tal que $v + (-v) = 0$.

2. A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, corresponde o vetor αv, denominado produto escalar de α por v, de modo que são válidas as propriedades:

   - **Propriedade associativa:** $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e para todo $v \in V$.
   - **Multiplicação por 1:** $1.v = v$, para todo $v \in V$.

   Além disso, são válidas as propriedades:

   - $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ para $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u, v \in V$.
   - $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v \in V$.

Definição 2.4: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que $v \in V$ é combinação linear dos vetores $v_1, ..., v_n \in V$ se existirem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$. Dizemos ainda que, um subconjunto não vazio B de V gera V se todo $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear de um número finito de vetores de B.

Definição 2.5: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ um subconjunto de V.

- Dizemos que B é **linearmente independente** (LI) se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, com $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, implicar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$.
- Dizemos que B é **linearmente dependente** (LD) quando não é LI.

Definição 2.6: Um subconjunto $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é uma base de um espaço vetorial se:

1. B é LI.
2. B gera V.

Exemplo 2.2.1: O conjunto $B = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ pois, é linearmente independente e gera $\mathbb{R}^3$. Em particular, essa base é chamada de base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Definição 2.7: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se V admite uma base finita, então chamamos de dimensão de V o número de elementos da base. Se não, dizemos que a dimensão de V é infinita.

Proposição 2.2: Se V é um espaço vetorial de dimensão n, então qualquer subconjunto V com mais de n vetores é LD.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [4], página 51.

2.3 Análise

Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. Neste caso, f é chamada de enumeração dos elementos de X. Dessa forma, se escrevermos $f(1) = x_1, f(2) = x_2, ..., f(n) = x_n, ...$, teremos que $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, ou seja, X tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais.

Teorema 2.4: Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Corolário 2.2: Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $f : X \to Y$ injetiva. Se Y é enumerável, então X tambem é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.

Corolário 2.3: Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $f : X \to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável, então Y tambem é.

Corolário 2.4: O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Corolário 2.5: A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

As demonstrações do teorema 2.4 e dos corolários 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 podem ser encontradas em [10], páginas 7 e 8.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que b é cota superior de X. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Chamamos a de cota inferior de X.

Definição 2.8: Seja X um conjunto limitado e não vazio.

- Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, um número $b \in \mathbb{R}$ é chamado de supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X.

- Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente, um número $a \in \mathbb{R}$ é chamado de ínfimo do conjunto X quando é a maior das cotas inferiores de X.

Axioma 2.1 (Axioma da Completude:): Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente possui supremo.

Definição 2.9: Dizemos que um intervalo não degenerado (a, b), com $a < b$ é um conjunto infinito, qualquer, de $\mathbb{R}$.

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ é chamado denso se, para todo intervalo não degenerado (a, b), tem-se que $S \cap (a, b) \neq \varnothing$.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se diz contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que para $x \in X$, com $|x - a| < \delta$, implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é diferenciável em $c \in (a, b)$ quando o limite $f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ existe. Quando a função tem derivada em todo ponto $x \in (a, b)$, dizemos que f é diferenciável em (a, b).

Teorema 2.5 (Teorema do Valor Médio de Lagrange): Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{[f(b) - f(a)]}{(b - a)}.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [10], página 98.

O fato a seguir será utilizado no capítulo 5 em uma das demonstrações deste trabalho.

Proposição 2.3 (Desigualdade triangular diminuída): Para todos a, $b \in \mathbb{R}$, temos $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Demonstração. Para todos a, $b \in \mathbb{R}$, temos $|a| \geq a$ e $|b| \geq b$. Portanto $|a| + |b| \geq a + b$. Além disso, $|a| \geq -a$ e $|b| \geq -b$.

Consequentemente, $|a| + |b| \geq -a - b = -(a + b)$. Temos assim $|a| + |b| \geq max\{a + b, -(a + b)\} = |a + b|$.

Provamos que $|a| + |b| \geq |a + b|$. Por outro lado, $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$. Daí segue que $|a| - |b| \leq |a - b|$. □

2.4 Variáveis complexas

Nesta seção veremos um importante resultado da variável complexa, este é chamado de Teorema Fundamental da Álgebra, que garante que toda equação polinomial não constante de coeficientes reais, ou complexos, possui pelo menos uma solução no conjunto dos números complexos.

Teorema 2.6 (Teorema Fundamental da Álgebra): Seja $P(z) = a_n z^n + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ um polinômio não constante com coeficientes complexos. Então existe um número complexo z_0 tal que $P(z_0) = 0$.

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [17], página 129.

Pode-se provar por indução que se P é um polinômio de grau n, então P tem exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas.

2.4.1 Desigualdade do valor médio para números complexos.

No capítulo 8 deste trabalho será demonstrado a transcendência do π. A demonstração que será apresentada se baseará na de R.Moritz, em Annals of Mathematics, volume 2, páginas 57 à 59, de 1901; com uma pequena modificação no momento em que se aplica o teorema do valor médio para polinômios complexos.

Sendo o teorema do valor médio apresentado no teorema 2.5, vamos reformulá-lo de modo a obtermos uma "desigualdade do valor médio", a qual será necessária para a demonstração da transcendência do π.

Definição 2.10: Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem derivada no ponto z se o limite abaixo existe:

$$f'(z) = \lim_{z_0 \to 0} \frac{f(z + z_0) - f(z)}{z_0},$$

em que $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f'(z)$ é chamada derivada de f em z. Dizemos que f é analítica quando f tem derivada em todo $z \in \mathbb{C}$.

Proposição 2.4 (Equações de Cauchy-Riemann): Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y); z = x + iy$. Se $f(z)$ é derivável em z, então as derivadas parciais existem e:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Demonstração. Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ as partes reais e imaginárias de $f(z)$, isto é:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y); z = x + iy.$$

Vamos supor que f seja diferenciável em z.

Dessa forma, vamos calcular a derivada de $f(z)$ usando valores reais e imaginários para z.

Primeiramente, vamos calcular a derivada de $f(z)$ usando valores reais. Temos:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}.$$

Observe que:

$$f(z + h) = f((x + iy) + h) = f((x + h) + iy) = u(x + h, y) + iv(x + h, y).$$

Então, realizando a substituição:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h, y) + iv(x + h, y) - (u(x, y) + iv(x, y))}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{v(x + h, y) - v(x, y)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.1)$$

Dessa mesma forma, vamos, agora, calcular a derivada de $f(z)$ utilizando valores imaginários puros.

$$f'(z) = \lim_{k \to 0} \frac{f(z + ik) - f(z)}{ik}.$$

Observe que:

$$f(z + ik) = f((x + iy) + ik) = f(x + i(y + k)) = u(x, y + k) + iv(x, y + k).$$

Então, realizando a substituição, temos:

$$f'(z) = \lim_{k\to 0} \frac{u(x,y+k) + iv(x,y+k) - (u(x,y) + iv(x,y))}{ik} =$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{u(x,y+k) - u(x,y)}{ik} + i \lim_{k\to 0} \frac{v(x,y+k) - v(x,y)}{ik} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.2)$$

Como existe $f'(z)$, temos 2.1=2.2 e, assim, obtemos as equações de Cauchy-Riemann:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

□

Observação: Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ for uma função analítica em $\mathbb{C}$ e se z_2 e z_1 forem números complexos, em geral, não é verdade que exista λ, $0 < \lambda < 1$, tal que:

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1)). \quad (2.3)$$

Vejamos o contraexemplo a seguir:

Seja $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$. Vamos supor que a relação dada por 2.3 é válida. Note que $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 + i$ e $z_4 = -1 - i$ são raízes de $P(z)$. Aplicando os pares de pontos (z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_4), (z_4, z_1) na relação dada, concluímos que $P'(z)$ tem 4 raízes distintas. O que contraria o teorema fundamental da álgebra, em 2.6, que diz que um polinômio de grau 3, tem exatamente 3 raízes complexas.

Teorema 2.7: Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica e sejam z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Então:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1| sup\{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))|; 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

em que $|z|$ representa o módulo do número complexo $z = x+iy$, isto é, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Demonstração. Vamos demonstrar primeiramente que a relação é válida para $z_0 = z_2 - z_1$, $0 \in \mathbb{C}$, ou seja:

$$|f(z_0) - f(0)| \leq 2|z_0| sup\{|f'(\lambda z_0)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Provado isto, o caso geral seguirá fazendo $g(z) = f(z + z_1)$, sendo que $z_0 = z_2 - z_1$. De fato:

$$|g(z_0) - g(0)| \leq 2|z_0| sup\{|g'(\lambda z_0)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

$$|f(z_0 + z_1) - f(0 + z_1)| \leq 2|z_0| sup\{|f'(\lambda z_0 + z_1)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Aplicando ao ponto $z_0 = z_2 - z_1$, temos:

$$|f((z_2 - z_1) + z_1) - f(0 + z_1)| \leq 2|(z_2 - z_1)|sup\{|f'(\lambda(z_2 - z_1) + z_1)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Isto implica que,

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1|sup\{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Neste momento, voltaremos ao caso $z_0, 0 \in \mathbb{C}$.

Agora, sejam u e v, as respectivas partes real e imaginária de $f(z)$. Dado $z_0 = x_0 + iy_0$, vamos definir as funções reais ϕ e ψ, tais que:

$$\begin{gathered} \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \phi(\lambda) = u(\lambda x_0, \lambda y_0). \\ \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \psi(\lambda) = v(\lambda x_0, \lambda y_0). \end{gathered}$$

Dessa forma, aplicando o teorema do valor médio, teorema 2.5, teremos:

$$\begin{gathered} \phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda_1); 0 < \lambda_1 < 1 \text{ e}, \\ \psi(1) - \psi(0) = \psi'(\lambda_2); 0 < \lambda_2 < 1. \end{gathered}$$

Para calcular as derivadas de ϕ e ψ, vamos utilizar o teorema de derivações das funções compostas. Logo,

$\phi'(\lambda_1) = \phi(1) - \phi(0) = u(x_0, y_0) - u(0,0) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0$ e,

$\psi'(\lambda_2) = \psi(1) - \psi(0) = v(x_0, y_0) - v(0,0) = v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0$.

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} f(z_0) - f(0) = {} & u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0 \\ & + i[v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Usando o fato que o módulo de um número complexo $z = x + iy$ é menor que a soma dos valores absolutos de sua parte real e imaginária, temos a desigualdade:

$$|z| \leq |x| + |y|. \tag{2.5}$$

Além disso, temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \tag{2.6}$$

em que a_1, a_2, b_1 e b_2 são números reais quaisquer.

A desigualdade 2.6 pode ser encontrada em [4], página 179.

Utilizando as desigualdades 2.5 e 2.6 na relação 2.4, obtemos que:

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \sqrt{u_x^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) + u_y^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$+\sqrt{v_x^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) + v_y^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Tendo em vista que:

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$

temos que os radicais envolvendo u e v acima são precisamente o módulo de f' calculado em alguns pontos, ou seja:

$$\sqrt{u_x^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) + u_y^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)} = |f'(\lambda_1 z_0)|.$$

$$\sqrt{v_x^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) + v_y^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)} = |f'(\lambda_2 z_0)|.$$

E assim, temos:

$$|f(z_0) - f(0)| \leq |f'(\lambda_1 z_0)||z_0| + |f'(\lambda_2 z_0)||z_0|. \tag{2.7}$$

Segue da desigualdade acima que:

$$|f(z_0) - f(0)| \leq 2|z_0| sup\{|f'(\lambda z_0)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

□

2.5 Polinômios simétricos

Seja σ uma permutação dos inteiros $1, ..., n$. Dado um polinômio $f(t_1, ..., t_n)$ a ele associamos um outro polinômio, que representamos por $f^\sigma(t_1, ..., t_n)$, assim definido $f^\sigma(t_1, ..., t_n) = f(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n)})$.

Um polinômio $f(t_1, ..., t_n)$ é chamado simétrico se

$$f^\sigma(t_1, ..., t_n) = f(t_1, ..., t_n)$$

para todas as permutações σ dos inteiros $1, ..., n$.

Se $t_1, ..., t_n \in \mathbb{C}$ são raízes de um polinômio $P(x)$, então esse polinômio é da forma:

$$P(x) = (x - t_1)(x - t_2)...(x - t_n). \tag{2.8}$$

Desenvolvendo o produto indicado em 2.8, obtemos:

$P(x) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + ... + (-1)^n s_n$, em que:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sum_{j=1}^{n} t_j \\
s_2 &= \sum_{i<j} t_i t_j \\
s_3 &= \sum_{i<j<k} t_i t_j t_k \\
&\vdots \\
s_n &= t_1 t_2 ... t_n.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Os polinômios $s_1, ..., s_n$ são chamados de **polinômios simétricos elementares** em $t_1, ..., t_n$. Dizemos que um **monômio** é uma expressão do tipo $at_1^{k_1}t_2^{k_2}...t_n^{k_n}$ nos quais os k_j são inteiros maiores ou iguais que 0 e $a \in A \subset \mathbb{C}$, em que $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{Q}$, é seu coeficiente. O **grau do monômio** é o número inteiro $\sum_{j=1}^{n} k_j$. Chamamos de **peso do monômio** o inteiro $\sum_{j=1}^{n} jk_j$. O **grau de um polinômio** é o máximo dos graus dos monômios que o formam. E, por fim, o **peso de um polinômio** é o máximo dos pesos dos monômios que o constituem.

Teorema 2.8: Seja $f(t_1, ..., t_n)$ um polinômio simétrico de grau d, com coeficientes em $A \subset \mathbb{C}$. Então existe um polinômio $g(s_1, ..., s_n)$ de peso menor ou igual que d, com coeficientes em A, em que $s_1, ..., s_n$ são polinômios simétricos elementares definidos em 2.9, tal que:

$$f(t_1, ..., t_n) = g(s_1, ..., s_n).$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada no apêndice de [6], página 78.

Exemplo 2.5.1: O polinômio $f(t_1, t_2) = t_1^2 + t_2^2 + 6t_1t_2$ é simétrico e pode ser escrito como $f(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2 + 4t_1t_2$. Nesse caso, podemos definir o polinômio $g(s_1, s_2)$ como $g(s_1, s_2) = s_1^2 + 4s_2$.

O teorema 2.8, será de grande importância na demonstração da transcendência do número π, no capítulo 8 deste trabalho.

3

Números Racionais e Irracionais

Nesse capítulo, veremos algumas definições e teoremas a respeito dos números racionais e irracionais, além das respectivas representações decimais desses conjuntos numéricos. Também será apresentada a irracionalidade de alguns números, como o número de Euler (e), alguns números logarítmicos e trigonométricos. Finalizaremos o capítulo com a prova da irracionalidade do π. Para este estudo, foram utilizadas as referências [5], [6], [8], [11], [12], [13], [14].

Por volta do ano 2000 a.C, os egípcios antigos faziam uso de frações para exprimir um resultado sempre que a divisão de um inteiro por outro não era exata. E, dessa forma, podemos dizer que surgia um novo conjunto numérico, que representaria os números racionais. Embora a representação fracionária dos racionais tenha sido descoberta antes de Cristo, o uso da forma decimal passou a ser rotineiro somente após uma publicação, de Simon Stevin, em 1585; apesar de já não ser novidade para os especialistas da época.

Os números irracionais, por sua vez, demoraram um pouco mais de tempo para serem incluídos na história da matemática. Acredita-se que Hipaso, estudioso grego, foi o primeiro a identificar os números irracionais, no século V antes de Cristo. Ao trabalhar com problemas geométricos, Hipaso aplicou o teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo de lados iguais a 1 e observou que o comprimento da hipotenusa seria $\sqrt{2}$, porém, esse número não podia ser expresso como razão de dois inteiros, e portanto, não poderia ser um número racional.

3.1 Eles são racionais

Nesta seção, veremos o conjunto de todas as frações ordinárias, ou também conhecido como o conjunto dos números racionais. A seguir, para fins didáticos, reveremos o conceito de número racional.

Definição 3.1: Um número racional é um número da forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Além disso, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. O conjunto de todos os números racionais é denotado por $\mathbb{Q}$.

Existem infinitos modos de escrever um dado número racional. Vejamos os exemplos abaixo:

- O número racional $\frac{2}{3}$ pode escrito como $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{2\pi}{3\pi}$, entre outros.
- $\frac{3}{7}$, pode ser escrito como $\frac{6}{14}$, $\frac{9}{21}$, dentre outras maneiras.

O mesmo acontece com todos os outros números racionais e, devido a isso, temos a definição a seguir:

Definição 3.2: Uma fração $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, é chamada irredutível se $mdc(a, b) = 1$.

Sempre existe a representação de uma fração com o denominador positivo. No que segue, sempre consideraremos essa representação.

3.2 Representação dos racionais

Além das infinitas representações fracionárias que todo número racional possui; esses números podem ser representados através de uma dízima decimal. Se tratando de racionais, essas dízimas podem ser decimais finitas ou infinitas. Vejamos os exemplos a seguir:

- São exemplos de racionais que admitem uma representação decimal finita: $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $\frac{2}{5} = 0{,}4$.
- Em contrapartida, os números racionais $\frac{1}{3} = 0{,}33333...$ e $\frac{5}{11} = 0{,}454545...$ têm sua representação decimal infinita.

3.2.1 Decimais finitos

Todo número real positivo que admite uma representação decimal e finita é racional. Além disso, uma de suas representações fracionárias tem uma potência de dez como denominador.

Teorema 3.1: Um número racional positivo, na forma irredutível $\frac{a}{b}$, com $b \geq 1$, tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.

Demonstração. Seja r um número com representação finita de casas decimais, ou seja:

$$r = s + 0{,}t_1 t_2 t_3 ... t_n,$$

em que $s \in \mathbb{N}$ é a parte inteira de r e cada $t_j \in \{0, 1, ..., 9\}$ representa uma casa decimal de r. Mostraremos que r possui uma representação em forma de fração ordinária na qual seu denominador é da forma $2^i 5^j$, para algum par i, $j \in \mathbb{N}$.

Note que, se todas as casas decimais são nulas, então $r = s \in \mathbb{N}$, logo, podemos escrevê-lo na forma fracionária:

$$r = \frac{s}{2^0 5^0}.$$

Assim, suponhamos que pelo menos uma casa decimal de r seja diferente de zero, ou seja, suponhamos que $t_n \neq 0$. Teremos:

$$(0, t_1t_2t_3...t_n).10^n = t_1t_2t_3...t_n.$$

Ou seja, temos:

$$0, t_1t_2t_3...t_n = \frac{t_1t_2t_3...t_n}{10^n}.$$

Dessa forma,

$$r = s + 0, t_1t_2t_3...t_n = s + \frac{t_1t_2t_3...t_n}{10^n} = \frac{s.10^n + t_1t_2t_3...t_n}{2^n5^n},$$

em que concluímos que um número racional r que tem sua representação decimal finita pode ser escrito com numerador inteiro e denominador da forma 2^n5^n.

Agora, seja r um número racional qualquer, na sua forma irredutível $\frac{a}{b}$.

Suponhamos que b seja da forma 2^m5^n com m e n inteiros positivos ou não nulos. Dessa forma, temos duas possibilidades, ou $n \leq m$, ou $n > m$.

Se $n \leq m$. Multipliquemos o numerador e o denominador da fração $\frac{a}{b}$ por 5^{m-n}:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^n.5^{m-n}} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^m} = \frac{a.5^{m-n}}{10^m}.$$

Sendo $m - n$ positivo ou não nulo, 5^{m-n} será um inteiro e, portanto, $a.5^{m-n}$ também será inteiro, digamos c. Assim, podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{10^m}$$

e, dessa forma, manipulando a vírgula para a divisão do inteiro c por 10^m, obteremos uma representação decimal finita para $\frac{a}{b}$. Do mesmo modo, se $n > m$, multipliquemos o numerador e o denominador de $\frac{a}{b}$ por 2^{n-m}, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.2^{n-m}}{2^m.5^n.2^{n-m}} = \frac{a.2^{n-m}}{2^n.5^n} = \frac{a.2^{n-m}}{10^n}.$$

Fazendo $d = a.2^{n-m}$, obteremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{10^n},$$

e assim, novamente teremos uma representação decimal finita para $\frac{a}{b}$. $\square$

Com base no teorema anterior, temos o seguinte corolário.

Exemplo 3.2.1: Considere o número racional $\frac{7}{8}$. Assumindo que $8 = 2^35^0$ e multiplicando o numerador e o denominador da fração por 5^3, temos:

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2^3.5^0} = \frac{7.5^3}{2^35^3} = \frac{7.5^3}{10^3} = \frac{875}{10^3} = 0{,}875.$$

Com base no teorema anterior, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1: Um número racional possui representação decimal infinita se, e só se, quando escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos do denominador possui fatores primos diferentes de 2 e 5.

3.2.2 Decimais infinitos: Dízimas periódicas

Veremos a seguir que as representações decimais infinitas de alguns números racionais possuem um grupo de algarismos que se repetem indefinidamente. Observe os exemplos a seguir:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333..., \frac{5}{11} = 0{,}454545..., \frac{3097}{9900} = 0{,}3128282828... \,.$$

Definição 3.3: Chamamos de período de uma dízima periódica infinita o conjunto de algarismos que se repetem indefinidamente.

Teorema 3.2: Seja $\frac{a}{b}$ a forma irredutível de um número racional positivo, com $b \geq 1$. Se a decomposição de b em fatores primos contém fatores diferentes de 2 e 5, então sua representação decimal é uma dízima periódica. Além disso, o período possui no máximo $b - 1$ algarismos.

Demonstração. Sabemos que a representação decimal de $\frac{a}{b}$ é infinita, pois b tem fatores primos diferentes de 2 e 5.

Seja r_1 o resto da divisão de a por b. É claro que $r_1 \neq 0$; caso $r_1 = 0$, a divisão seria exata, o que resultaria em um número inteiro. Sendo assim, temos $1 \leq r_1 \leq b - 1$.

Agora, o próximo passo é dividir $r_1 10^k$ por b, sendo que k é o primeiro número natural tal que $r_1 10^k > b$. Encontramos um novo resto r_2, com $1 \leq r_2 \leq b - 1$.

Prosseguindo com o processo de divisão, obteremos a sequência de restos $\{r_1, r_2, r_3, ..., r_{b-1}, r_b\}$, com $1 \leq r_j \leq b - 1$ para todo $j = 1, 2, ..., b$.

Tendo em mente que há apenas $b - 1$ possibilidades de restos diferentes para esta divisão, então o resto r_b já apareceu pelo menos uma vez na sequência $r_1, r_2, ..., r_{b-1}$. Isso garante que o processo de divisão entrou em um ciclo de repetição e que o comprimento do período é de no máximo $b - 1$ algarismos.

□

Teorema 3.3: Todo número real positivo cuja representação decimal é infinita e periódica é racional.

Demonstração. Seja $j = r_0, r_1 r_2 \ldots r_n \overline{p_1 p_2 \ldots p_m}$.

Multiplicando j por 10^{n+m}, temos:

$$10^{n+m} j = r_0 r_1 r_2 \ldots r_n p_1 p_2 \ldots p_m, \overline{p_1 p_2 \ldots p_m}. \tag{3.1}$$

Multiplicando j por 10^n, temos:

$$10^n j = r_0 r_1 r_2 \ldots r_n, \overline{p_1 p_2 \ldots p_m}. \tag{3.2}$$

Subtraindo 3.1 de 3.2, temos:

$$10^{n+m}j - 10^n j = r_0 r_1 r_2 \dots r_n p_1 p_2 \dots p_m, \overline{p_1 p_2 \dots p_m} - r_0 r_1 r_2 \dots r_n, \overline{p_1 p_2 \dots p_m}.$$

Isto implica que

$$j = \frac{r_0 r_1 r_2 \dots r_n p_1 p_2 \dots p_m - r_0 r_1 r_2 \dots r_n}{10^{n+m} - 10^n},$$

$$j = \frac{r_0 r_1 r_2 \dots r_n p_1 p_2 \dots p_m - r_0 r_1 r_2 \dots r_n}{10^n (10^m - 1)}.$$

Como j é uma dízima periódica, então $m \geq 1$ e $10^m - 1 \neq 0$.

□

Como consequência dos teoremas 3.1, 3.2 e 3.3 temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4: Um número é racional se, e só se, sua representação decimal é finita ou infinita periódica.

Agora desafiamos o leitor a responder a pergunta abaixo.

Desafio 3.1: O número com a expansão decimal 0,1234567891011121314..., formado por todos os números naturais ordenados, é racional?

Esse número é conhecido como constante de Champernowne. A resposta para esse desafio será vista no capítulo 6 deste trabalho.

3.3 Densidade e enumerabilidade dos racionais

Veremos nesta seção que o conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$ e enumerável.

Teorema 3.5: O conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $a < b$ números reais.

Vamos mostrar que existe um número $x \in \mathbb{Q}$, tal que $a < x < b$.

Note que, $b - a > 0$. Logo, existe $n \in \mathbb{Z}$, com $n > 0$, tal que:

$$b - a > \frac{1}{n} > 0.$$

Nesse caso, o intervalo (na, nb) tem comprimento maior que 1, ou seja, $nb - na = n(b - a) > 1$.

Mas, todo intervalo de comprimento maior que 1 deve conter um inteiro, $m \in (na, nb)$.

Portanto $na < m < nb$ e então:

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Assim, $\frac{m}{n}$ é o racional no intervalo (a,b) cuja existência queríamos mostrar. □

Proposição 3.1: Mostre que o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) é enumerável.

Demonstração: Seja $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ o conjunto dos números inteiros. Queremos mostrar que a cardinalidade de $\mathbb{Z}$ é igual a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Sendo assim, considere a função a seguir:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$
$$f(n) := \begin{cases} -2n; n \leq 0 \\ 2n - 1; n > 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Queremos mostrar que f é uma bijeção. Para isso, mostraremos que f é sobrejetora e injetora.

1. f **é sobrejetora:** Seja $m \in \mathbb{N}$.

   - Se m é par, considere $m = 2k$. Dessa forma, tome $n = -k$. Logo:

   $$f(n) = f(-k) = -2(-k) = 2k = m.$$

   - Se m é ímpar, seja $m = 2k - 1$. Tome $n = k$. Logo:

   $$f(n) = f(k) = 2(k) - 1 = 2k - 1 = m.$$

2. f **é injetora:** $f(n) = f(m)$, ou ambos são pares ou ambos são ímpares.

   - Par: $-2n = -2m$ o que implica $n = m$.
   - Ímpar: $2n - 1 = 2m - 1$ o que implica $n = m$.

Verificamos assim que, de fato, f é bijetora e, portanto, $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Teorema 3.6: O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Demonstração. Seja $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$.

Sabendo disso, vamos definir a seguinte função sobrejetora:

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$$
$$(m, n) \mapsto \frac{m}{n}.$$

Pelo corolário 2.4, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Logo, pelo corolário 2.3, $\mathbb{Q}$ é enumerável. □

3.4 Os irracionais

A interação humana com o conjunto dos números irracionais já é bem antiga; todavia, a pouco menos de dois séculos, formalizaram-se as teorias em torno desse tema. Definidos pelo que não são, os números irracionais são caracterizados por não possuírem representação fracionária e serem dízimas infinitas não periódicas.

Definição 3.4: Um número real é **irracional** se ele não é racional. Denotamos o conjunto dos irracionais por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3.4.1 Alguns irracionais

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de números irracionais.

Exemplo 3.4.1: $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, da forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, tal que $mdc(a, b) = 1$.

Assim, temos que:

$$\sqrt{2}b = a \text{ o que implica que } 2b^2 = a^2. \tag{3.4}$$

Dessa forma, temos que a^2 é par, logo, a também será par, digamos que $a = 2k$.

Agora, substituindo $a = 2k$ em 3.4, teremos:

$$2b^2 = (2k)^2 = 4k^2.$$

$$\text{Logo, } b^2 = 2k^2.$$

Diante disso, b^2 também é um número par, o que também implica que b é par.

Mas, note que, temos a, b ambos números pares, e consequentemente o $mdc(a, b) \geq 2$ e, portanto, $2|mdc(a, b)$. Todavia, por hipótese, o $mdc(a, b) = 1$; o que nos leva a um absurdo. □

Exemplo 3.4.2: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o número de ouro, é irracional.

Demonstração. Vamos supor que $\phi \in \mathbb{Q}$, logo:

$$\phi = \frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \tag{3.5}$$

com $a, b \in \mathbb{N}$ $mdc(a, b) = 1$.

Por definição $\phi > 1$ implica que $a > b > 1$.

Reescrevendo a igualdade (3.5), temos:

$$b(1 + \sqrt{5}) = 2a.$$

Daí,

$$b + \sqrt{5}b = 2a.$$

Ou seja,

$$\sqrt{5}b = 2a - b.$$

Consequentemente,

$$5b^2 = (2a - b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2.$$

Subtraindo $-b^2$ de ambos os lados, temos:

$$4b^2 = 4a^2 - 4ab.$$

Assim,

$$b^2 = a(a - b).$$

Dessa forma, temos que $a|b^2$, mas por hipótese, a, b são primos entre si, e portanto, $mdc(a, b^2) = 1$. E assim, temos que $a = 1$, pois $a|b^2$ e $mdc(a, b^2) = 1$. O que é um absurdo, pois, por hipótese, $a > b \geq 1$. □

Exemplo 3.4.3: O $sen(10°)$ é irracional.

Demonstração. Considere as seguintes fórmulas trigonométricas:

$$sen(A + B) = sen(A)cos(B) + cos(A)sen(B). \tag{3.6}$$

E,

$$cos(A + B) = cos(A)cos(B) - sen(A)sen(B). \tag{3.7}$$

Substituindo nas equações acima, A e B por θ, temos de 3.6:

- $sen(\theta + \theta) = sen(\theta)cos(\theta) + cos(\theta)sen(\theta).$
  Ou seja,
  $$sen(2\theta) = 2sen(\theta)cos(\theta). \tag{3.8}$$
  E de 3.7:
- $cos(\theta + \theta) = cos(\theta)cos(\theta) + sen(\theta)sen(\theta).$
  Ou seja,
  $$cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta). \tag{3.9}$$

Da mesma forma, realizando a substituição de A e B, em 3.6, por 2θ e θ, respectivamente, temos:

$$sen(3\theta) = sen(2\theta)cos(\theta) + cos(2\theta)sen(\theta).$$

Assim, substituindo os valores encontrados para $sen(2\theta)$ e $cos(2\theta)$, em 3.8 e 3.9, respectivamente, obtemos:

$$sen(3\theta) = (2sen(\theta)cos(\theta))cos(\theta) + (cos^2(\theta) - sen^2(\theta))sen(\theta),$$
$$sen(3\theta) = 2sen(\theta)cos^2(\theta) + (cos^2(\theta)sen(\theta) - sen^3(\theta)),$$
$$sen(3\theta) = 3cos^2(\theta)sen(\theta) - sen^3(\theta).$$

Partindo da relação em que $cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$, temos:

$$sen(3\theta) = 3(1 - sen^2(\theta))sen(\theta) - sen^3(\theta),$$

$$sen(3\theta) = 3(sen(\theta) - sen^3(\theta)) - sen^3(\theta),$$

$$sen(3\theta) = 3sen(\theta) - 3sen^3(\theta) - sen^3(\theta).$$

$$\text{Logo, } sen(3\theta) = 3sen(\theta) - 4sen^3(\theta). \tag{3.10}$$

Por conseguinte, substituindo θ por $10°$ em 3.10, chegamos ao seguinte resultado:

$$sen(3(10°)) = 3sen(10°) - 4sen^3(10°),$$

$$sen(30°) = 3sen(10°) - 4sen^3(10°).$$

Utilizando do fato conhecido que $sen(30°) = \frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{2} = 3sen(10°) - 4sen^3(10°).$$

Substituindo $sen(10°)$ por x, encontramos a seguinte equação:

$$\frac{1}{2} = 3x - 4x^3.$$

Multiplicando esse resultado por 2, obtemos que:

$$\begin{aligned} &1 = 6x - 8x^3, \\ &8x^3 - 6x + 1 = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pela forma como construímos a equação acima, podemos notar que $sen(10°)$ é uma raiz da mesma. Desse modo, vamos analisar as possíveis raízes racionais desse polinômio, que pelo teorema 2.3, serão da forma: $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\}$.

Substituindo em 3.11, cada uma das suas possíveis raízes racionais, obtemos os resultados a seguir:

- Para $x = -1$ temos $-1 = 8(-1)^3 - 6(-1) + 1 \neq 0$.
- Para $x = +1$ temos $3 = 8(+1)^3 - 6(+1) + 1 \neq 0$.
- Para $x = \frac{-1}{2}$ temos $3 = 8(\frac{-1}{2})^3 - 6(\frac{-1}{2}) + 1 \neq 0$.
- Para $x = \frac{1}{2}$ temos $-1 = 8(\frac{1}{2})^3 - 6(\frac{1}{2}) + 1 \neq 0$.
- Para $x = \frac{-1}{4}$ temos $\frac{19}{8} = 8(\frac{-1}{4})^3 - 6(\frac{-1}{4}) + 1 \neq 0$.
- Para $x = \frac{1}{4}$ temos $\frac{-3}{8} = 8(\frac{1}{4})^3 - 6(\frac{1}{4}) + 1 \neq 0$.
- Para $x = \frac{-1}{8}$ temos $\frac{111}{64} = 8(\frac{-1}{8})^3 - 6(\frac{-1}{8}) + 1 \neq 0$.
- Para $x = \frac{1}{8}$ temos $\frac{17}{64} = 8(\frac{1}{8})^3 - 6(\frac{1}{8}) + 1 \neq 0$.

Diante disso, podemos observar que nenhuma das possíveis raízes racionais satisfaz a equação dada em 3.11; e, como $sen(10°)$ é uma raiz desse polinômio, temos que $sen(10°)$ é um número irracional. □

Exemplo 3.4.4: Se $cos(2\theta)$ é irracional, então $cos(\theta), sen(\theta)$ e $tg(\theta)$ são irracionais.

Demonstração. Seja a função trigonométrica definida em 3.7.

Substituindo A e B por θ, temos que:

$$cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta).$$

Da relação $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$, obtemos:

- $cos(2\theta) = (1 - sen^2(\theta)) - sen^2(\theta)$.
  Daí,
  $$cos(2\theta) = 1 - 2sen^2(\theta). \tag{3.12}$$
- $cos(2\theta) = cos^2(\theta) - (1 - cos^2(\theta))$.
  Logo,
  $$cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1. \tag{3.13}$$

Isso posto, vamos supor por absurdo que $cos(\theta)$ seja racional. Logo, teríamos que o produto de dois racionais é racional, ou seja, $cos(\theta)cos(\theta) = cos^2(\theta)$ é racional. Assim, multiplicando $cos^2(\theta)$ por 2 e adicionando (-1), implicaria que $2cos^2(\theta) - 1 \in \mathbb{Q}$.

Mas, por 3.13, $cos(2\theta) = 2cos^2\theta - 1 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Logo, encontramos um absurdo. Então, de fato, $cos(\theta)$ é irracional.

Da mesma forma, suponhamos que $sen(\theta)$ seja racional; logo, pelo mesmo argumento anterior, teríamos que: $sen^2(\theta)$ e $1 - 2sen^2(\theta)$ são também racionais. Mas, por 3.12, $1 - 2sen^2(\theta) = cos(2\theta)$, que por hipótese é irracional. Logo, temos uma contradição, o que implica que $sen(\theta)$ é irracional.

Por último, vamos supor que $tg(\theta)$ seja racional. Logo, $tg(\theta)tg(\theta) = tg^2(\theta) \in \mathbb{Q}$. Considere a seguinte identidade trigonométrica:

$$1 + tg^2(\theta) = sec^2(\theta) = \frac{1}{cos^2(\theta)}.$$

Observe que, como $tg^2(\theta)$ é racional, $1 + tg^2(\theta)$ também será, pois é a soma de dois racionais, consequentemente, teríamos que $cos^2(\theta) \in \mathbb{Q}$.

Todavia, por 3.13, temos que:

$$cos^2(\theta) = \frac{cos(2\theta) + 1}{2},$$

e, como $cos^2(\theta)$ é racional, $cos(2\theta)$ também o é. Mas, por hipótese, $cos(2\theta)$ é irracional. Diante disso, temos uma contradição, portanto, $tg(\theta)$ é irracional, como queríamos mostrar. □

Exemplo 3.4.5: $log_{10}2$ é irracional.

Demonstração. Suponha que $log_{10}2$ seja racional. Logo, é da forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Podemos escrever da seguinte maneira:

$$log_{10}2 = \frac{a}{b} \text{ o que implica que } 10^{\frac{a}{b}} = 2.$$

Elevando ambos os lados da igualdade acima por b, temos:

$$2^a 5^a = 10^a = 2^b, \text{ uma igualdade de inteiros positivos.}$$

Vamos então analisar essa igualdade. Pelo teorema fundamental da aritmética, apresentado no teorema 2.2, 2^b não é divisível por 5, para qualquer valor de b. Por outro lado, a expressão à direita é divisível por 5. Ou seja, temos uma contradição, e portanto, $log_{10}2$ é irracional. □

Exemplo 3.4.6: $log_{10}21$ é irracional.

Demonstração. Vamos supor que existam inteiros positivos a e b, tais que:

$$log_{10}21 = \frac{a}{b} \text{ o que implica } 10^{\frac{a}{b}} = 21.$$

Elevando ambos os lados da relação acima por b, temos:

$$10^a = 21^b. \tag{3.14}$$

Note que, pelo teorema fundamental da aritmética, teorema 2.2, $10^a = 2^a 5^a$. Em contrapartida, $21^b = 3^b 7^b$, logo a igualdade em 3.14 é falsa, pois 21 possui apenas os números 3 e 7 em sua fatoração, números estes que não aparecem na fatoração de 10.

Logo, $log_{10}21$ é irracional. □

Exemplo 3.4.7: Sejam c e d dois inteiros positivos distintos. Então, $log_{10}(2^c 5^d)$ é irracional.

Demonstração. Como c e d são inteiros positivos, então $(2^c 5^d)$ também será.

Sabendo disso, vamos supor que $log_{10}(2^c 5^d)$ seja racional. Logo, $log_{10}(2^c 5^d) = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Temos que:

$$log_{10}(2^c 5^d) = \frac{a}{b} \text{ ou seja } 10^{\frac{a}{b}} = 2^c 5^d.$$

Elevando ambos os membros dessa igualdade por b, temos:

$$2^a 5^a = 10^a = 2^{cb} 5^{db}. \tag{3.15}$$

Pelo teorema fundamental da aritmética, teorema 2.2, temos que:

$$2^a 5^a = 2^{cb} 5^{db} \text{ se, e só se, } a = cb \text{ e } a = db \text{ o que implica } cb = db.$$

Não obstante, por hipótese, c e d são inteiros não negativos distintos. Portanto, a igualdade dada em 3.15 não é válida, e assim temos que $log_{10}(2^c 5^d)$ é irracional.

□

3.5 Racionais x irracionais

Nesta seção, veremos como os racionais e irracionais se relacionam perante operações matemáticas.

Teorema 3.7: A soma de um número racional e um número irracional sempre será irracional.

Demonstração. Vamos supor que $a \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \notin \mathbb{Q}$, tais que $a + \alpha = b \in \mathbb{Q}$.

Note que, $\alpha = b - a$, mas $b - a \in \mathbb{Q}$ e, por hipótese, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

O que é um absurdo, logo, $a + \alpha$ é irracional.

□

Exemplo 3.5.1: Dê exemplo de dois números irracionais tais que sua soma é irracional, mas seu produto é racional.

Note que o produto não é fechado no conjunto dos números irracionais. Se tomarmos $\sqrt{2}$, embora somando-o consigo mesmo o resultado seja irracional, já que $2\sqrt{2}$ não é racional, o produto $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ é um número racional.

Teorema 3.8: O produto de um número racional não nulo por um número irracional é sempre irracional.

Demonstração. Suponhamos que $a \in \mathbb{Q}$, logo $a = \frac{p}{q}$, com $p, q \neq 0$, e seja α um número irracional, tal que:

$$\frac{p}{q}\alpha = \frac{m}{n}, \qquad \text{em que } m, n \in \mathbb{Z}, \text{ com } n \neq 0.$$

Multiplicando ambos os lados dessa igualdade por $\frac{q}{p}$, obtemos o seguinte resultado:

$$\alpha = \frac{mq}{np}.$$

Mas, $\dfrac{mq}{np} \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \notin \mathbb{Q}$, o que é um absurdo.

Logo, $\dfrac{p}{q}\alpha$ é um número irracional. □

Exemplo 3.5.2: Sejam a, b, c, d números racionais e α é um número irracional. Então,

$$a + b\alpha = c + d\alpha \text{ se, e somente se, } a = c \text{ e } b = d.$$

Demonstração. Suponha que $a + b\alpha = c + d\alpha$. Somando $(-a - d\alpha)$ em ambos os lados, obtemos:

$$b\alpha - d\alpha = c - a,$$

$$\alpha(b - d) = c - a.$$

Mas, observe que $(b - d)$ e $(c - a) \in \mathbb{Q}$, enquanto que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Assim sendo, o único resultado possível para que essa igualdade seja verdadeira é $b = d$ e $c = a$.

Por outro lado, se $a = c$ e $b = d$, então, partindo de $b = d$ e multiplicando a expressão por α, temos que:

$$b\alpha = d\alpha$$

Somando a, obtemos:

$$a + b\alpha = a + d\alpha.$$

Como $a = c$, obtemos:

$$a + b\alpha = c + d\alpha.$$

□

3.6 A irracionalidade do *e*

A origem do número de Euler não é tão exata na história da matemática. No século XVI, com o surgimento da expressão matemática para juros compostos, se percebeu que a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ que aparecia na fórmula dos juros compostos tendia a um certo limite, para n suficientemente grande. E, dessa forma, o número de Euler foi definido como:

$$e = lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Uma outra forma de se obter o número de Euler é através da série abaixo:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}... \,.$$

Como veremos nesta seção, o número e é um número irracional, por sua vez, representado por infinitas casas decimais não periódicas da forma:

$$e = 2{,}71828182845904523536 02... \,.$$

Teorema 3.9: O número e é irracional.

Demonstração. Suponha que e seja racional, logo $e = \dfrac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a, b \geq 1$.

Temos que:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{b!} + \frac{1}{(b+1)!} + ... \,. \tag{3.16}$$

Fazendo $e = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a(b-1)!}{b!}$ e igualando a equação obtida em 3.16, temos:

$$e = \frac{a(b-1)!}{b!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{b!} + \frac{1}{(b+1)!} + ... \; .$$

Multiplicando ambos os lados da relação acima por $b!$, obtemos:

$$a(b-1)! = \frac{b!}{0!} + \frac{b!}{1!} + ... + \frac{b!}{b!} + \frac{b!}{(b+1)!}\frac{b!}{(b+2)!} + ... \; .$$

Ou seja:

$$a(b-1)! = \frac{b!}{0!} + \frac{b!}{1!} + ... + \frac{b!}{b!} + \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + ... \; . \tag{3.17}$$

Seja $A_b = \dfrac{b!}{0!} + \dfrac{b!}{1!} + ... + \dfrac{b!}{b!}$.

Note que $A_b \in \mathbb{Z}$. Assim, subtraindo A_b em ambos os lados da equação 3.17, temos:

$$a(b-1)! - A_b = \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + ... \; .$$

Agora, observe que

$$\frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + ..., \tag{3.18}$$

é menor que a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{(b+1)^n}\right). \tag{3.19}$$

Assim temos:

$$0 < \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + ... < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{(b+1)^n}\right) = \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{\frac{b+1-1}{b+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{b+1}.\frac{b+1}{b} = \frac{1}{b} < 1.$$

Ou seja, a série em 3.19 converge para um número menor que 1, o que implica que a expressão em 3.18 $\in (0,1)$.

Mas, não existem inteiros no intervalo $(0,1)$, o que é uma contradição. Portanto, e é irracional. $\square$

3.7 A irracionalidade do π

Os antigos povos, em suas observações, perceberam que a razão entre o valor do perímetro de diferentes círculos e seus respectivos diâmetros era sempre o mesmo.

Há indícios na Bíblia, no livro de Reis, capítulo 7, versículo 23, que os Hebreus utilizavam 3 como uma aproximação para o número π, como podemos ver no trecho: "Fez o Mar de Bronze" de metal fundido, dez cúbitos de borda a borda, de forma circular, e com cinco cúbitos de altura; uma corda com 30 cúbitos de comprimento dava a medida de sua periferia.

A irracionalidade do π foi demontrada pela primeira vez pelo matemático francês Johann Heinrich Lambert, em 1761, utilizando de frações contínuas. Nosso objetivo nessa seção é demonstrar a irracionalidade do número π.

Teorema 3.10: π é irracional.

Demonstração. Vamos supor que $\pi \in \mathbb{Q}$; logo podemos escrever $\pi = \dfrac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{N}$.

Considere a função:

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}, \qquad \text{tal que } n \in \mathbb{N} \text{ e será escolhido posteriormente.}$$

Considere também a função:

$$F(x) := f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \ldots \ ,$$

sendo que $f^{(r)}(x)$ denota a derivada de ordem r de f. Note que $f^{(m)}(x) = 0$ para todo $m \geq 2n+1$, pois f é um polinômio de grau $2n$.

A segunda derivada de $F(x)$ é dada por

$$F^{(2)}(x) := f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \ldots \ .$$

Deste modo,

$$F(x) + F^{(2)}(x) = f(x).$$

Seja a função:

$$g(x) := F^{(1)}(x)sen(x) - F(x)cos(x).$$

Pela regra do produto e da soma, temos:

$$g^{(1)}(x) = F^{(2)}(x)sen(x) + F^{(1)}(x)cos(x) - F^{(1)}(x)cos(x) + F(x)sen(x),$$

$$g^{(1)}(x) = (F^{(2)}(x) + F(x))sen(x) = f(x)sen(x).$$

Aplicaremos agora o teorema fundamental do cálculo, que pode ser encontrado em [10], página 137. Temos:

$$\int_0^\pi f(x)sen(x)dx = \int_0^\pi g^{(1)}(x)dx = g(\pi) - g(0) =$$

$$(F^{(1)}(\pi)sen(\pi) - F(\pi)cos(\pi)) - (F^{(1)}(0)sen(0) - F(0)cos(0)) = F(\pi) + F(0).$$

Afirmamos que $F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}$.

Com efeito, note que $f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}[x^n]^{(j)}[(a-bx)^n]^{(k-j)}$, para todo k inteiro positivo. Da expressão da k-ésima derivada, segue que $f^{(k)}(0) = f^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ para todo inteiro k, com $1 \leq k \leq n$. Além disso, $f^{(k)}(0)$ e $f^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ são inteiros para k inteiro, com $k \geq n+1$. Tendo em mente a definição de $F(x)$, segue que $F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}$.

Note que $f(x) = \dfrac{x^n(a-bx)^n}{n!} > 0$ para todo $x \in \left(0, \frac{a}{b}\right)$.

O mesmo ocorre para a função $sen(\theta)$, isto é, ela assume apenas valores positivos no intervalo $\left(0, \frac{a}{b}\right)$. Deste modo, $f(x)sen(x) > 0$ para todo $x \in \left(0, \frac{a}{b}\right)$. Logo,

$$0 < \int_0^\pi f(x)sen(x)dx \leq \int_0^\pi f(x)dx. \tag{3.20}$$

Aqui usamos o fato que $0 \leq sen(x) \leq 1$.

Temos

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \leq \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n (a)^n}{n!} = \frac{\pi^n a^n}{n!}, \text{ para todo } x \in \left(0, \frac{a}{b}\right). \tag{3.21}$$

De 3.20 e 3.21 segue que:

$$0 < F(\pi) + F(0) = \int_0^\pi f(x)sen(x)dx \leq \int_0^\pi f(x)dx$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{\pi^n a^n}{n!}dx = \frac{\pi(a\pi)^n}{n!}.$$

Ora, $F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}$ e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\pi(a\pi)^n}{n!} = 0$.

Isso significa que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$0 < F(\pi) + F(0) \leq \frac{\pi(a\pi)^n}{n!} < 1, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Absurdo, pois $(0,1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

$\square$

4

Números Algébricos e Transcendentes

Neste capítulo, veremos a respeito dos números algébricos e transcendentes. Para esse estudo, foram utilizadas as referências [6], [16].

4.1 Os números algébricos

Grande parte dos números encontrados na álgebra elementar podem ser facilmente notados como soluções de equações polinomiais simples. Um exemplo seria o número -1, que é raiz da equação polinomial $x+1=0$. Não é difícil de observar que o número $\sqrt{2}$ satisfaz a equação $x^2-2=0$; o número $i=\sqrt{-1}$ também pertence a esse grupo, visto que é solução da equação $x^2+1=0$.

Definição 4.1: Um número complexo c que satisfaz uma equação da forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$$

com coeficientes inteiros, com $a_n \neq 0$, é chamado de **número algébrico.**

Proposição 4.1: Um número complexo é algébrico se, e só se, satisfaz uma equação algébrica com coeficientes racionais.

Definição 4.2: Denotamos o conjunto dos números algébricos por $\bar{Q}$.

4.1.1 Operando com algébricos

Para demonstrarmos os itens 1 e 2 a seguir, utilizaremos os conceitos de espaços vetoriais vistos no capítulo de Noções Básicas.

1. A soma de dois números algébricos é algébrico.

   Demonstração. Sejam α e β dois números algébricos. Logo, são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros.
   Dividindo ambas essas equações pelos seus respectivos coeficientes líderes, vamos obter:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0, \tag{4.1}$$

e,

$$x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0 = 0. \tag{4.2}$$

Como α é raiz de 4.1, temos $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$. Assim, podemos escrever:

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - ... - a_1\alpha - a_0, \tag{4.3}$$

ou seja, podemos escrever α^n como combinação linear de $1, \alpha, ...,\alpha^{n-1}$, com coeficientes racionais.
Multiplicando a expressão 4.3 por α, obteremos α^{n+1} como também combinação linear de $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$, sendo os coeficientes racionais. Dessa mesma forma, podemos escrever todas as potências α^j, com $j \geq n$, como combinação linear de $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$, fazendo uso de coeficientes racionais.
Analogamente, como β é raiz de 4.2, temos $\beta^m + b_{m-1}\beta^{m-1} + ... + b_1\beta + b_0 = 0$ e, dessa forma, também podemos escrever todas as potências β^k, para $k \geq m$, como combinação linear de $1, \beta, ..., \beta^{m-1}$, usando coeficientes racionais.
Sabendo disso, queremos mostrar que $\alpha+\beta$ é solução de uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais e, portanto, $\alpha + \beta$ será algébrico.
Assim sendo, considere os $mn + 1$ números abaixo:

$$1, (\alpha + \beta), (\alpha + \beta)^2, (\alpha + \beta)^3, ..., (\alpha + \beta)^{mn}; \tag{4.4}$$

e o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelos elementos:

$$B = \{\alpha^i\beta^j \mid 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}.$$

Como B é um conjunto de geradores de mn elementos, então possui base com dimensão menor ou igual a mn elementos. Então, a dimensão deste espaço é menor ou igual a mn, logo pela proposição dada em 2.2, os $mn + 1$ números em 4.4 são LD.
E, portanto, existem racionais $(r_0, ..., r_{mn})$, nem todos nulos, tais que:

$$r_0 + r_1(\alpha + \beta) + r_2(\alpha + \beta)^2 + ... + r_{mn}(\alpha + \beta)^{mn} = 0.$$

O que mostra que $(\alpha + \beta)$ satisfaz uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais, e consequentemente, é algébrico. □

2. O produto de dois números algébricos é algébrico.

   Demonstração. Sejam α e β dois números algébricos. Logo, são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros.
   Dividindo ambas essas equações pelos seus respectivos coeficientes líderes, vamos obter:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0, \tag{4.5}$$

e,

$$x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0 = 0. \quad (4.6)$$

Como α é raiz de 4.5, temos $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$. Assim, podemos escrever:

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - ... - a_1\alpha - a_0, \quad (4.7)$$

ou seja, podemos escrever α^n como combinação linear de $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$, com coeficientes racionais.
Multiplicando a expressão 4.7 por α, obteremos α^{n+1} como também combinação linear de $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$, sendo os coeficientes racionais. Dessa mesma forma, podemos escrever todas as potências α^j, com $j \geq n$, como combinação linear de $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$, utilizando coeficientes racionais.
Analogamente, como β é raiz de 4.6, temos $\beta^m + b_{m-1}\beta^{m-1} + ... + b_1\beta + b_0 = 0$ e, dessa forma, também podemos escrever todas as potências β^k, para $k \geq m$, como combinação linear de $1, \beta, ..., \beta^{m-1}$, usando coeficientes racionais.
Sabendo disso, queremos mostrar que $\alpha\beta$ é solução de uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais e, portanto, $\alpha\beta$ será algébrico.
Assim sendo, considere os $mn + 1$ números abaixo:

$$1, (\alpha\beta), (\alpha\beta)^2, (\alpha\beta)^3, ..., (\alpha\beta)^{mn}; \quad (4.8)$$

e o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelos elementos:

$$B = \{\alpha^i\beta^j \mid 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}.$$

Como B é um conjunto de geradores de mn elementos, então possui uma base de dimensão menor ou igual a mn elementos, como foi visto em 2.2. Assim, os $mn + 1$ números em 4.8 são LD e podem ser escritos como combinação linear dos elementos de B.
Portanto, existem racionais $(s_0, s_1, ..., s_{mn})$, nem todos nulos, tais que:

$$s_0 + s_1(\alpha\beta) + s_2(\alpha\beta)^2 + ... + s_{mn}(\alpha\beta)^{mn} = 0.$$

Assim, temos que $\alpha\beta$ é solução de uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais, e consequentemente, algébrico, como queríamos mostrar. □

3. O simétrico $(-a)$ de um número algébrico a é algébrico.

   Demonstração. Se a é algébrico, então é raiz de uma equação polinomial do tipo $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$. Logo, $-a$ é raiz da equação:

$$(-1)^n a_n x^n + (-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + ... + (-1)^1 a_1 x + (-1)^0 a_0 = 0.$$

□

4. O inverso (a^{-1}) de um número algébrico a, diferente de zero, é algébrico.

   Demonstração. Se a é algébrico, então satisfaz uma equação polinomial do tipo $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$. Portanto, a^{-1} é raiz da equação:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

□

4.2 Os números transcendentes

Em 1844, o matemático francês Joseph Lioiuville provou que os números não algébricos, de fato, existiam. Esses números, por sua vez, receberam o nome de transcendentes.

No próximo capítulo, veremos alguns números produzidos por Liouville que representam os números transcendentes, um dos mais conhecidos é a constante de Liouville $\left(\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + ...\right)$, cuja expansão decimal é formada por blocos cada vez maiores de zeros.

Definição 4.3: Um número complexo é dito **transcendente** se não é algébrico, ou seja, não é raiz de nenhuma equação polinomial da forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros, sendo que $a_n \neq 0$.

4.3 Caracterizando o conjunto dos algébricos e dos transcendentes

É bem conhecido que cada número a do conjunto $[0, 1)$ possui um única representação decimal $0, a_1a_2a_3...a_n...$, em que:

1. Para todo $i \in \mathbb{N}^*, a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

2. Não existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $a_n = 9$ para todo $n \geq n_0$.

Usaremos este fato no teorema a seguir.

Teorema 4.1: O conjunto dos números reais não é enumerável.

Demonstração. Segundo o teorema 2.4, basta mostrarmos que o subconjunto dos números reais [0, 1) é não enumerável.

Dessa forma, vamos supor que [0, 1) seja enumerável. Assim, podemos supor que $[0,\ 1) = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ seja uma sequência infinita.

Escrevendo os números dessa sequência, em sua forma decimal, vamos obter:

$$x_1 = 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}...$$

$$x_2 = 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}...$$

$$x_3 = 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}...$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0{,}a_{n1}a_{n2}a_{n3}...$$

$$\vdots$$

Agora, seja $b \in [0,\, 1)$ um número decimal da forma $b = 0, b_1b_2b_3b_4...$, tal que todos os b_{i_s} sejam diferentes de 0 ou 9 e, além disso, $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, ..., b_n \neq a_{nn}, ...$.

Diante disso, temos que b é diferente de x_1, pois diferem na primeira casa decimal. Do mesmo modo, b é diferente de x_2, pois diferem na segunda casa decimal.

Assim, temos que para todo n, $b_n \neq a_{nn}$. Logo $b \neq x_i$, mas $b \in [0,\, 1)$. O que é um absurdo.

Logo $[0,\, 1)$ é não enumerável e, consequentemente, $\mathbb{R}$ é não enumerável. □

Corolário 4.1: Todo intervalo não degenerado da reta é não enumerável.

A demonstração deste corolário pode ser encontrada em [10], página 19.

Definição 4.4: Chamamos de altura de um polinômio da forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ a soma dos valores absolutos dos coeficientes, acrescido o grau desse polinômio. Assim, temos:

$$|P| = |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_1| + |a_0| + n.$$

Teorema 4.2: O conjunto de todos os números algébricos ($\bar{Q}$) é enumerável.

Demonstração. Dado um polinômio com coeficientes inteiros:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0, \text{ com } a_n \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

a sua altura é dada por:

$$|P| = |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_1| + |a_0| + n.$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, teorema 2.6, para cada polinômio de grau n, teremos no máximo n raízes complexas.

A uma dada altura, teremos um número finito de polinômios. Para isso, incluímos a parcela n na definição de altura.

Portanto, todas as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito.

O conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas é a união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos e, segundo o corolário 2.5, é enumerável. $\square$

Uma pergunta que aparece nesse momento é se existem números transcendentes. O teorema abaixo afirma que sim, vejamos.

Teorema 4.3: Existem números transcendentes.

Demonstração. Suponhamos que não existam transcendentes reais. Logo, teríamos $\mathbb{R} = \bar{Q} \cap \mathbb{R}$.

Mas $\bar{Q} \cap \mathbb{R}$, como foi visto no teorema 4.2, é enumerável. Todavia, $\mathbb{R}$ é não enumerável, pelo teorema 4.1. Ou seja, temos uma contradição.

Logo, existem números transcendentes e, mais ainda, o conjunto dos números transcendentes é não enumerável. $\square$

Observação: Visto que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, podemos dizer que $\mathbb{C} = \bar{Q} \cup (\mathbb{C} - \bar{Q})$.

Proposição 4.2: O conjunto $\bar{Q} \cap \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Note que $\mathbb{Q} \subset \bar{Q} \cap \mathbb{R}$ e, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, como foi apresentado no teorema 3.5. Logo, segue trivialmente que $\bar{Q} \cap \mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$. $\square$

Proposição 4.3: O conjunto dos números transcendentes reais é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja I um intervalo aberto não-degenerado em $\mathbb{R}$. Suponhamos que I não contenha números transcendentes; logo, seria formado apenas por números algébricos e seria enumerável.

Absurdo, pois todo intervalo não-degenerado é não-enumerável. Como consequência, o conjunto dos números transcendentes reais é denso em $\mathbb{R}$. $\square$

4.4 Operando com algébricos e transcendentes

Proposição 4.4: Sejam $\alpha \in \bar{Q}$ e $\beta \in (\mathbb{C} - \bar{Q})$, então:

1. $\alpha + \beta \in (\mathbb{C} - \bar{Q})$.

   Demonstração. Vamos supor que $\alpha + \beta = a \in \bar{Q}$. Somando o simétrico aditivo de α de ambos os lados, teremos:

   $$\alpha + \beta + (-\alpha) = a + (-\alpha) \text{ o que implica que } \beta = a - \alpha \in \bar{Q}.$$

   Pois, como vimos no início desse capítulo, a soma de algébricos é algébrico. O que é uma contradição, pois $\beta \in (\mathbb{C} - \bar{Q})$.
   Dessa forma $\alpha + \beta \in (\mathbb{C} - \bar{Q})$. $\square$

2. $\alpha\beta \in (\mathbb{C} - \bar{Q})$, com $\alpha \neq 0$.

Demonstração. Suponhamos que $\alpha\beta = c \in \bar{Q}$. Multiplicando ambos os lados dessa igualdade pelo inverso multiplicativo de α, temos:

$$\alpha^{-1}\alpha\beta = \alpha^{-1}c \text{ o que implica que } \beta = \alpha^{-1}c \in \bar{Q}.$$

O que contradiz a hipótese de β ser transcendente. Logo $\alpha\beta \in (\mathbb{C} - \bar{Q})$. □

3. $\beta^{-1} \in (\mathbb{C} - \bar{Q})$.

Demonstração. Suponha que $\beta^{-1} \in \bar{Q}$. Assim, temos que $(\beta^{-1})^{-1} \in \bar{Q}$. Mas, $(\beta^{-1})^{-1} = \beta$; o que é um absurdo, pois, por hipótese, $\beta \in (\mathbb{C} - \bar{Q})$. Logo $\alpha\beta^{-1} \in (\mathbb{C} - \bar{Q})$. □

5

Números de Liouville

Joseph Liouville foi quem teve o primeiro contato com os números transcendentes. Para seus estudos, utilizou de um simples, porém criterioso fato, que foi caracterizar os números algébricos quanto a sua aproximação por racionais. É sabido que todo número real é limite de uma sequência de racionais; todavia, Liouville observou que os números algébricos não eram tão "bem-aproximados" por racionais. Com esse feito, Liouville apresentou um conjunto de números que não satisfaziam a condição de serem algébricos. A esses números, deu o nome de números de Liouville e, em seguida, demonstrou a transcendência dos mesmos. Para a construção desse capítulo foram utilizadas as referências [9] e [18].

Definição 5.1: Um número algébrico α é dito de grau n se ele for raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros de grau n e, além disso, não existir nenhum polinômio com coeficientes inteiros, de grau menor que n, que contenha α como uma de suas raízes.

Definição 5.2: Um polinômio de grau n, $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, com coeficientes racionais é mônico quando $a_n = 1$.

Exemplo 5.0.1: Os polinômios $x^3 + 3x^2 + 5$ e $x^4 + 15x^3 + 2x^2 + 4x + 2$ são mônicos.

Definição 5.3: Seja α um número algébrico. O polinômio mônico de menor grau no qual α é raiz é chamado polinômio minimal.

Exemplo 5.0.2: Todo número racional $\frac{p}{q}$, tal que $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$; é algébrico de grau 1, pois $\alpha = \frac{p}{q}$ é raiz da equação $x - \frac{p}{q} = 0$.

Podemos concluir com base no exemplo anterior que, se α é algébrico de grau maior ou igual a 2, então, α é irracional.

Definição 5.4: Um número real α é aproximável na ordem n por racionais se existirem uma constante real $c > 0$ e uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ de racionais distintos, com

$q_j > 0$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$, tais que:

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^n}.$$

O teorema a seguir descreve uma importante propriedade dos números algébricos não racionais.

Note que: $\left|\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{3^2}$ e $\left|\sqrt{2} - \frac{7}{3}\right| > \frac{A}{3^2}$, em que $A \in \{1, 2, 3, ..., 8\}$. Em geral, temos:

Teorema 5.1: Seja α um número algébrico real de grau $n > 1$. Então existe $A > 0$, que depende de α tal que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{q^n},$$

para todo racional $\frac{p}{q}$.

Demonstração. Como α é algébrico, este é raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros.

Seja $f(x) = x^n + ... + a_1 x + a_0$, com $a_i \in \mathbb{Z}$, o polinômio minimal do qual α é raiz.

Como $f(x)$ tem no máximo n raízes reais, existe $\delta > 0$ tal que, no intervalo $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, a única raiz de $f(x) = 0$ é α.

Note que a derivada $f'(x)$ de $f(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e é limitada em intervalos limitados. Dessa forma, existe $M > 0$ tal que:

$$|f'(x)| \leq M, \text{ para } x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta].$$

Dado $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $q > 0$, temos duas possibilidades. Vamos analisá-las separadamente a seguir:

1ºcaso: $\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

Sabemos que $f(x)$ é contínua e derivável no intervalo aberto cujas extremidades são $\frac{p}{q}$ e α.

Assim, aplicando o teorema do valor médio, teorema 2.5, temos:

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\psi)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right),$$

em que $\psi \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$.

Como $f(\alpha) = 0$, podemos reescrever a relação acima como:

$$-f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\psi)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right).$$

Aplicando a função módulo em ambos os lados, temos:

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(\psi)|\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|. \quad (5.1)$$

Por outro lado, temos que $f(x) = x^n + ... + a_1 x + a_0$ e $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, pois $\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ e, nesse intervalo, a única raiz de f é α.

Logo,

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0\right| =$$

$$\left|\frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n}{q^n}\right| =$$

$$\frac{|p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}.$$

Assim, encontramos uma cota inferior para $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|$. Dessa forma, unindo ao resultado obtido em 5.1, temos:

$$\frac{1}{q^n} \leq \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Dividindo ambos os lados da relação acima por M, obtemos:

$$\frac{1}{M}\frac{1}{q^n} \leq \frac{1}{M}\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Isto implica que

$$\frac{1}{M}\frac{1}{q^n} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|, \text{ para } \frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta].$$

2º caso: $\frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

Assim, temos que: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta$.

Como $q \geq 1$, temos que $q^n \geq 1$ o que implica que $\frac{1}{q^n} \leq 1$ e, portanto, $\frac{\delta}{q^n} \leq \delta$.

Logo, temos:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta \geq \frac{\delta}{q^n}, \text{ para } \frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta].$$

Por último, tomando A como o menor dos números $\frac{1}{M}$ e δ, temos:

$$\frac{1}{M} \geq A \text{ o que implica } \frac{1}{Mq^n} \geq \frac{A}{q^n}.$$

$$\text{E, } \delta \geq A \text{ o que implica } \frac{\delta}{q^n} \geq \frac{A}{q^n}.$$

Dessa forma, temos que a relação $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n}$ é válida para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. □

Foi visto no capítulo 3 deste trabalho que o conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Dessa forma, é possível aproximar qualquer número real por racionais. Todavia, o teorema 5.1 nos mostrou que os números algébricos não racionais "não são bem aproximáveis por racionais". É importante ressaltar que se um certo número não possui uma propriedade que todos os números algébricos devem possuir, então ele é um número não algébrico e, por sua vez, transcendente.

Definição 5.5: Um número real α é chamado de **Liouville** se existir uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ de racionais distintos, em que $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$, com $q_j > 0$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$, tais que:

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Vamos denotar o conjunto dos números de Liouville por: $\mathbb{L}$.

Ao propor a definição acima, a ideia de Liouville foi apresentar um conjunto de números que são bem aproximados por racionais, em que o erro dessa aproximação é menor que $\frac{1}{q_j^j}$. Dessa forma, podemos dizer que os números de Liouville são "muito bem" aproximáveis na ordem n por racionais.

Veremos mais tarde alguns exemplos de números de Liouville.

Proposição 5.1: A sequência $\{q_j\}_{j\geq 1}$ é ilimitada.

Demonstração. Note que:

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} < 1. \tag{5.2}$$

Suponha que a sequência $\{q_j\}_{j\geq 1}$ seja limitada, ou seja, existe M, tal que $q_j \leq M$.

Multiplicando a relação em 5.2 por q_j, obtemos:

$$|\alpha q_j - p_j| < q_j \leq M.$$

Assim, aplicando a desigualdade triangular diminuída, proposição 2.3, teremos:

$$|p_j| - |\alpha q_j| \leq M.$$

Logo,

$$|p_j| \leq M + |\alpha||q_j| \leq (|\alpha| + 1)M.$$

Ou seja, se $\{q_j\}$ é limitada, $\{p_j\}$ também será limitada. Absurdo, pois existem infinitos $\frac{p_j}{q_j}$. Dessa forma, $\{q_j\}_{j\geq 1}$ é ilimitada. $\square$

Agora que sabemos o que é um número de Liouville é natural a seguinte pergunta: Há números de Liouville que são racionais? E irracionais?

Proposição 5.2: Todo número de Liouville é irracional.

Demonstração. Seja α um número de Liouville.

Suponha que $\alpha \in \mathbb{Q}$, logo $\alpha = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Pela definição de número de Liouville, apresentada na definição 5.5, existe uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}^*}$, de infinitos racionais, todos diferentes de α, tais que:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Ou seja,

$$\left|\frac{pq_j - p_jq}{qq_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Como $p, q \in \mathbb{Z}$, pq_j e p_jq são inteiros distintos, sua diferença em módulo é maior ou igual a 1. Assim, temos:

$$|pq_j - p_jq| \geq 1 \text{ o que implica que } \frac{1}{|qq_j|} \leq \left|\frac{pq_j - p_jq}{qq_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Logo, $\frac{1}{|qq_j|} < \frac{1}{q_j^j}$.

Isso nos diz que $|q|q_j > q_j^j$ e dividindo ambos os lados desta relação por q_j, temos que: $|q| > q_j^{j-1}$. O que é um absurdo, pois $\{q_j\}_{j\geq 1}$ é ilimitada.

Logo, todo número de Liouville é irracional. □

Proposição 5.3: Todo número de Liouville é transcendente.

Demonstração. Vamos supor que $\alpha \in \mathbb{L}$ e seja algébrico de grau $n > 1$.

Segundo a definição de número de Liouville, na definição 5.5, existe uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ de racionais distintos, tais que:

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Mas, como α é algébrico de grau $n > 1$, pelo teorema 5.1, existe $A > 0$ tal que:

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| > \frac{A}{q_j^n}.$$

Assim, obtemos:

$$\frac{A}{q_j^n} < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Logo, $\dfrac{A}{q_j^n} < \dfrac{1}{q_j^j}$ o que implica que $\dfrac{q_j^j}{q_j^n} < \dfrac{1}{A}$ e, portanto, $q_j^{j-n} < \dfrac{1}{A}$, para todo $j \in \mathbb{N}^*$.

Absurdo, pois $\{q_j\}_{j\geq 1}$ é ilimitada.

Logo, α não pode ser algébrico, então temos que α é transcendente. □

Com base nos resultados apresentados até aqui, Liouville deu o primeiro exemplo de um número transcendente, conhecido como a constante de Liouville, como veremos a seguir.

Exemplo 5.0.3: O número $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0{,}110001...$ é transcendente.

Demonstração. Vimos que todo número de Liouville é transcendente, assim sendo, basta mostrarmos que α é um número de Liouville.

Sejam $p_j = \sum_{k=1}^{j} 10^{j!-k!}$ e $q_j = 10^{j!} > 0$.

Note que:

$$\frac{p_j}{q_j} = \frac{\sum_{k=1}^{j} 10^{j!-k!}}{10^{j!}} = \sum_{k=1}^{j} 10^{-k!} = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{10^{k!}},$$

ou seja, é a j-ésima soma parcial de α.

Dessa forma,

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{10^{k!}}\right| = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Reescrevendo a expressão acima, temos:

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+2)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!}} + ... =$$

$$\frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!-(j+1)!}} + ...\right).$$

Observe que, a diferença entre os fatoriais é $(j+k)! - (j+1)! > k-1$, para $k \geq 2$.

Assim, temos que:

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| = \frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!-(j+1)!}} + ...\right) <$$

$$\frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...\right).$$

Mas, note que $\left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...\right)$ é uma série geométrica e podemos calcular sua soma, que será $\frac{10}{9}$.

Concluímos, assim, que:

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(\frac{10}{9}\right).$$

Agora, observe que: $(j+1)! = j!(j+1) = j!j + j! > j!j$.

Logo,

$$\frac{10}{9}\frac{1}{10^{j!j+j}} < \frac{1}{10^{j!j}}.$$

E, assim, temos que:
$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{10^{j!j}} = \frac{1}{q_j^j}.$$
Ou seja, α é um número de Liouville, e como consequência da proposição 5.3, é transcendente. □

Exemplo 5.0.4: Os números da forma $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} = 0, a_1a_2000a_3...$, em que $a_k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ são números transcendentes.

Demonstração. Vamos definir $p_j = \sum_{k=1}^{j} a_k 10^{j!-k!}$ e $q_j = 10^{j!} > 0$, com $k \in \mathbb{N}$.

Note que:
$$\frac{p_j}{q_j} = \frac{\sum_{k=1}^{j} a_k 10^{j!-k!}}{10^{j!}} = \sum_{k=1}^{j} a_k 10^{-k!} = \sum_{k=1}^{j} \frac{a_k}{10^{k!}}.$$

Dessa forma:
$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} - \sum_{k=1}^{j} \frac{a_k}{10^{k!}}\right| = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} =$$
$$\frac{a_{j+1}}{10^{(j+1)!}} + \frac{a_{j+2}}{10^{(j+2)!}} + ... =$$
$$\frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(a_{j+1} + \frac{a_{j+2}}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \frac{a_{j+3}}{10^{(j+3)!-(j+1)!}} + ...\right).$$
Assumindo que o maior número que a_k pode assumir é 9, temos:
$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} \leq \frac{9}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!-(j+1)!}} + ...\right).$$

Assim sendo, observe que a diferença entre os fatoriais é $(j+k)!-(j+1)! > k-1$, para $k \geq 2$.

Logo:
$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| \leq \frac{9}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!-(j+1)!}} + ...\right) <$$
$$\frac{9}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...\right).$$

Observe que $\left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...\right)$ é uma série geométrica, de soma igual a $\frac{10}{9}$, ou seja:
$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{9}{10^{(j+1)!}}\frac{10}{9} = \frac{10}{10^{(j+1)!}}.$$

Agora, note que $(j+1)! = j!(j+1) = j!j + j! > j!j$.

Logo, $\dfrac{10}{10^{(j+1)!}} < \dfrac{1}{10^{j!j}}$.

E, portanto,

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{10^{j!j}} = \frac{1}{q_j^j}.$$

Dessa forma, α é um número de Liouville e, consequentemente, é transcendente.

$\square$

Lema 5.1: Um número α é de Liouville se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Demonstração. Se α é um número de Liouville, então existe uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ com infinitos racionais distintos, com p_j e q_j inteiros relativamente primos e $q_j > 0$.

Dessa forma, dado $n \in \mathbb{N}^*$, podemos escolher o elemento $\frac{p_n}{q_n} \in \left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ tal que $p = p_n$ e $q = q_n$ que satisfaz

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

Recíproca. Se para todo $n \in \mathbb{N}^*$ existe $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}$, então, considere $A = \cup_{n\geq 1}\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$.

Se A for finito, existe $\frac{p}{q} \in A$ tal que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}^*$, com $\mathbb{N}'$ infinito.

Temos $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0$. Assim, $\alpha = \frac{p}{q}$, o que contradiz o fato $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 0$.

Portanto, A é infinito e $\alpha \in \mathbb{L}$. $\square$

Lema 5.2: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se existirem $c > 0$ e uma sequência de racionais $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\geq 1}$ distintos com $q_j \geq 1$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$, tais que:

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^j}, \text{ então } \alpha \in \mathbb{L}.$$

Demonstração. Vamos analisar duas situações que podem acontecer.

1º caso: Se $0 < c \leq 1$, então:

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^j} \leq \frac{1}{q_j^j}$$

e, portanto, α é um número de Liouville.

2º caso: Se $c > 1$, note que, com um argumento análogo à proposição 5.1, a sequência $\{q_j\}$ é ilimitada. Logo, passando a uma subsequência de $\{q_j\}$, se necessário, existe j_0 tal que, para todo $j > j_0$ tem-se $c < q_j^{j_0}$, tal que :

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^j} < \frac{q_j^{j_0}}{q_j^j} = \frac{1}{q_j^{j-j_0}}, \text{ para todo } j \geq j_0.$$

Assim, para todo $j \geq j_0$, considere a sequência dos números naturais $n = j - j_0$.

Dessa forma, para todo n da sequência de naturais definida existe $\frac{p}{q} = \frac{p_j}{q_j}$, tal que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Pelo lema 5.1, α é um número de Liouville. □

Lema 5.3: Se existirem uma sequência ilimitada $\{w_k\}_{k\geq 1}$ de números reais positivos e uma sequência de racionais $\left\{\frac{p_k}{q_k}\right\}_{k\geq 1}$ tais que $0 < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{w_k}}$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, então, α é Liouville.

Demonstração. Seja $\{s_k\}_{k\geq 1} \subseteq \{w_k\}_{k\geq 1}$ uma subsequência ilimitada em que $s_k > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}_{k\geq 1} \subseteq \left\{\frac{p_k}{q_k}\right\}_{k\geq 1}$ tal que $0 < \left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right| < \frac{1}{b_k^{s_k}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora, tomemos uma sequência de números reais $\{r_k\}_{k\geq 1}$, com $r_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, tal que $s_k - r_k = k$.

Então, temos:

$$0 < \left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right| < \frac{1}{b_k^{s_k}} < \frac{1}{b_k^{s_k - r_k}} = \frac{1}{b_k^k}.$$

Ou seja, $0 < \left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right| < \frac{1}{b_k^k}$.

Assim, pelo lema 5.1, temos que $\alpha \in \mathbb{L}$. □

Teorema 5.2: Se $\alpha \in \mathbb{L}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ com $q \geq 1$, então:

1. $\alpha\frac{p}{q} \in \mathbb{L}$.
2. $\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) \in \mathbb{L}$.

Demonstração. (i) Se $\alpha \in \mathbb{L}$, então existe uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}^*}$, de infinitos racionais distintos, com $mdc(p_j, q_j) = 1$ e $q_j > 1$, tal que: $\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$.

Multiplicando p e q por um inteiro positivo maior ou igual a 2, se necessário, podemos admitir que $q \geq 2$.

Vamos definir $\alpha_j = log_q q_j$, em que $q^{\alpha_j} = q_j$.

Restringindo a uma subsequência de $\{q_j\}_{j\geq 1}$, se preciso, temos $\lim_{j\to+\infty} \alpha_j = +\infty$, e ainda:

$$\left|\alpha\frac{p}{q} - \frac{p}{q}\frac{p_j}{q_j}\right| = \left|\alpha\frac{p}{q} - \frac{p}{q}\frac{p_j}{q^{\alpha_j}}\right| = \left|\alpha\frac{p}{q} - \frac{pp_j}{q^{\alpha_j+1}}\right|.$$

Por outro lado, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|p| < q^k$. Então:

$$\left|\alpha\frac{p}{q} - \frac{p}{q}\frac{p_j}{q_j}\right| = \frac{|p|}{q}\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{|p|}{q}\frac{1}{q_j^j} =$$

$$\frac{|p|}{q}\frac{1}{(q^{\alpha_j})^j} = \frac{|p|}{q^{j\alpha_j+1}} = \frac{|p|}{\left(q^{\alpha_j+1}\right)^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}}}.$$

Como $|p| < q^k$ para algum $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\left|\alpha\frac{p}{q} - \frac{p}{q}\frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{|p|}{\left(q^{\alpha_j+1}\right)^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}}} < \frac{q^k}{\left(q^{\alpha_j+1}\right)^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}}} = \frac{1}{\left(q^{\alpha_j+1}\right)^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}-k}}.$$

O cálculo diferencial e integral nos diz que, se uma função $f(x)$ é uma função diferenciável tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, pelo teorema de L´hospital, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+f(x)} = 1$ e, assim, $\lim_{x\to\infty} x\frac{f(x)}{1+f(x)} = \infty$.

Logo, utilizando deste fato, temos que:

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{j\alpha_j}{\alpha_j+1} + \frac{1}{\alpha_j+1} - k\right) = +\infty;$$

no qual, $w_j = \frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1} - k$ é uma sequência ilimitada de números reais positivos.

Assim, pelo lema 5.3, $\alpha\frac{p}{q} \in \mathbb{L}$.

(ii) Da mesma forma do item anterior, vamos definir $\alpha_j = log_q q_j$, em que $q^{\alpha_j} = q_j$.

Observe que $\lim_{j\to+\infty} \alpha_j = +\infty$, e ainda:

$$\left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j}{q_j} + \frac{p}{q}\right)\right| = \left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j q + p q_j}{q q_j}\right)\right| =$$

$$\left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j q + p q_j}{q q^{\alpha_j}}\right)\right| = \left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j q + p q_j}{q^{\alpha_j+1}}\right)\right|.$$

Por outro lado,

$$\left|\left(\alpha + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p_j}{q_j} + \frac{p}{q}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} = \frac{1}{q^{(\alpha_j)j}} = \frac{1}{\left(q^{\alpha_j+1}\right)^{\frac{j\alpha_j}{\alpha_j+1}}}.$$

Mas, $\lim_{j\to+\infty} \frac{j\alpha_j}{\alpha_j+1} = +\infty$; no qual $s_j = \frac{j\alpha_j}{\alpha_j+1}$ é uma sequência ilimitada de números reais positivos e, pelo lema 5.3, $\left(\alpha + \frac{p}{q}\right)$ é um número de Liouville. □

O teorema 5.2 nos diz que existem infinitos números de Liouville. O próximo e último teorema deste capítulo afirma que qualquer número real pode ser escrito como a soma de dois números de Liouville.

Teorema 5.3 (Teorema de Erdös): Dado $\beta \in \mathbb{R}$, então existem l_1 e $l_2 \in \mathbb{L}$, tais que $\beta = l_1 + l_2$.

Demonstração. Para realizarmos essa demonstração, vamos precisar analisar três casos. Vejamos:

1º Caso: $\beta \in \mathbb{L}$.

Neste caso, basta escolhermos $l_1 = l_2 = \frac{\beta}{2}$. Pois, pelo teorema 5.2, vimos que $\frac{\beta}{2}$ é um número de Liouville. Assim, existem l_1 e $l_2 \in \mathbb{L}$, tais que $\beta = l_1 + l_2$.

2º Caso: $\beta \in \mathbb{Q}$.

Se β é racional, vamos tomar $\alpha \in \mathbb{L}$. Dessa forma, considere $l_1 = \frac{\beta+\alpha}{2}$ e $l_2 = \frac{\beta-\alpha}{2}$. Pelo teorema 5.2, l_1 e $l_2 \in \mathbb{L}$. Por fim, note que $\beta = l_1 + l_2$.

3º Caso: $\beta \notin \mathbb{Q}$.

Assim sendo, seja $\beta \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, então $\beta = \lfloor \beta \rfloor + \{\beta\}$, em que $\lfloor \beta \rfloor \in \mathbb{Z}$, corresponde a parte inteira de β e $\{\beta\} \in (0,1)$, corresponde a parte fracionária de β.

Dessa forma, é suficiente provarmos que existem $l_1 + l_2 = \{\beta\}$.

Como $\{\beta\} \in (0,1) \cap \mathbb{Q}^c$, podemos escrever

$$\{\beta\} = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, \text{ no qual } a_n \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}.$$

Assim vamos definir $l_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{10^n}$ e $l_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{10^n}$, em que para $n! \leq k \leq (n+1)!$, teremos:

$$\begin{cases} \lambda_k = a_k \text{ e } \delta_k = 0, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \\ \lambda_k = 0 \text{ e } \delta_k = a_k, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

É fácil ver que $\{\beta\} = l_1 + l_2$, resta verificar que l_1 e l_2 são números de Liouville.

Para mostrarmos que $l_1 \in \mathbb{L}$, dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos $p_n = \sum_{k=1}^{(2n)!-1} \lambda_k 10^{(2n)!-(1+k)}$ e $q_n = 10^{(2n)!-1}$.

Assim,

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\sum_{k=1}^{(2n)!-1} \lambda_k 10^{(2n)!-(1+k)}}{10^{(2n)!-1}} = \sum_{k=1}^{(2n)!-1} \lambda_k 10^{-k} = \sum_{k=1}^{(2n)!-1} \frac{\lambda_k}{10^k}.$$

Dessa forma,

$$\left| l_1 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{10^k} - \sum_{k=1}^{(2n)!-1} \frac{\lambda_k}{10^k} \right| = \sum_{k=(2n)!}^{\infty} \frac{\lambda_k}{10^k}.$$

Como $\lambda_k = 0$ para $(2n)! \leq k < (2n+1)!$, podemos escrever que:

$$\left| l_1 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{\lambda_k}{10^k} \leq \sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{9}{10^k} =$$

$$\frac{9}{10^{(2n+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... \right).$$

Mas, note que $1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...$ é uma série geométrica de soma igual a $\frac{10}{9}$.

Assim, temos:

$$\left| l_1 - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{9}{10^{(2n+1)!}} \frac{10}{9} = \frac{1}{10^{((2n)!+1)-1}} < \frac{1}{10^{n((2n)!-1)}} = \frac{1}{(10^{(2n)!-1})^n} = \frac{1}{q_n^n}.$$

Ou seja,

$$\left| l_1 - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}.$$

E, portanto, l_1 é um número de Liouville.

De forma análoga, podemos mostrar que $l_2 \in \mathbb{L}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos $p_n = \sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \delta_k 10^{(2n+1)!-(1+k)}$ e $q_n = 10^{(2n+1)!-1}$.

Assim,

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{\sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \delta_k 10^{(2n+1)!-(1+k)}}{10^{(2n+1)!-1}} = \sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \delta_k 10^{-k} = \sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \frac{\delta_k}{10^k}.$$

Dessa forma,

$$\left| l_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{10^k} - \sum_{k=1}^{(2n+1)!-1} \frac{\delta_k}{10^k} = \sum_{(2n+1)!}^{\infty} \frac{\delta_k}{10^k}.$$

Como $\delta_k = 0$ para $(2n+1)! \leq k < (2n+2)!$, podemos escrever que:

$$\left| l_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{(2n+2)!}^{\infty} \frac{\delta_k}{10^k} \leq \sum_{(2n+2)!}^{\infty} \frac{9}{10^k} =$$

$$\frac{9}{10^{(2n+2)!}} \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ... \right).$$

Mas, $1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...$ é uma série geométrica de soma igual a $\frac{10}{9}$.

Assim, temos que:

$$\left| l_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{9}{10^{(2n+2)!}} \frac{10}{9} = \frac{1}{10^{(2n+2)!-1}} < \frac{1}{10^{n((2n-1)!-1)}} = \frac{1}{(10^{(2n-1)!-1})^n} = \frac{1}{q_n^n}.$$

Ou seja, $\left| l_2 - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}$ e, portanto, l_2 é um número de Liouville. $\square$

Neste último teorema vimos que qualquer número real pode ser escrito como a soma de dois números de Liouville. Este resultado é interessante e nos mostra a importância desses números, uma vez que o conjunto dos números de Liouville tem medida nula em $\mathbb{R}$, ou seja, quase nenhum número real é de Liouville. Todavia, pelo teorema de Erdös, concluímos que apesar de o conjunto dos números de Liouville ser quase "invisível" em $\mathbb{R}$, esses números estão posicionados estrategicamente na reta real.

6

A Constante de Champernowne

Em 1933, D. G Champernowne apresentou uma determinada constante formada por todos os números naturais conectados. Essa constante, $c = 0{,}123456789101213...$, recebeu o nome de constante de Champernowne. Kurt Mahler provou sua transcendência e, em seguida, mostrou que a constante de Champernowne não era um número de Liouville.

Em resposta ao desafio deixado no capítulo 3, podemos notar que a constante de Champernowne é um decimal infinito não periódico, visto que é formada pela junção de todos os números naturais. Dessa forma, c é irracional.

A demonstração que será apresentada neste capítulo foi realizada por Mahler em 1968, em que fez uso de dois importantes resultados demonstrados por F. Roth, em 1955.

Como material teórico para a construção deste capítulo, foram utilizadas as referências [1], [9] e [15]. Agora, apresentaremos dois resultados.

Teorema 6.1 (Teorema de Roth): Sejam α um número algébrico e irracional e $\epsilon > 0$. Então, o conjunto $\left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right\}$ é finito.

Corolário 6.1 (Corolário de Roth): Sejam α um número algébrico e irracional e $\epsilon > 0$. Então existe $k = k(\alpha, \epsilon)$, tal que para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$;

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{k}{q^{2+\epsilon}}.$$

As demonstrações do teorema 6.1 e do corolário 6.1 podem ser encontradas em [9].

6.1 Transcendência da constante de Champernowne

Os resultados a seguir foram retirados do trabalho de [15].

Teorema 6.2: A constante de Champernowne é transcendente.

Demonstração. Seja $c = 0,12345678910111213141516...$ a constante de Champernowne.

Vamos construir uma sequência de racionais $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\geq 1}$, que possa contradizer o corolário de Roth, corolário 6.1.

Para melhor compreensão, serão apresentados os dois primeiros termos da sequência.

Seja $r_1 = \frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...+\frac{9}{10^9}+\frac{10}{10^{10}}+\frac{1}{10^{11}}+\frac{2}{10^{12}}+\frac{3}{10^{13}}+...+\frac{9}{10^{19}}+\frac{10}{10^{20}}+... =$

$$\frac{10}{81} = 0{,}\overline{1234567890}.$$

Dessa forma,

$$|c - r_1| < \frac{1}{10^9} < \frac{1}{81^{4,5}}.$$

Assim, vamos tomar $\frac{p_1}{q_1} = r_1 = \frac{10}{81}$. Daí, temos que:

$$|c - r_1| < \frac{1}{81^{4,5}} = \frac{1}{q_1^{4,5}},$$

em que $\frac{p_1}{q_1}$ é o primeiro termo da nossa sequência.

Agora, tome $r_2 = \frac{10}{10^2}+\frac{11}{10^4}+\frac{12}{10^6}+...+\frac{99}{10^{178}}+\frac{100}{10^{180}}+... =$

$$\frac{991}{99^2} = 0{,}\overline{10111213...9798991}.$$

Assim, obtemos que:

$$\left|10^9 c - 123456789 - \frac{991}{99^2}\right| < \frac{1}{10^{178}}.$$

Isto implica que

$$\left|c - \frac{A}{10^9 99^2}\right| < \frac{1}{10^{187}}.$$

Dessa forma, $A = 123456789.99^2 + 991.10^9.99^2$. Agora, fazendo $\frac{p_2}{q_2} = \frac{A}{10^9 99^2}$, temos que:

$$\left|c - \frac{p_2}{q_2}\right| < \frac{1}{10^{187}} < \frac{1}{q_2^{4,5}}, \text{ em que } q_2 = 10^9.99^2.$$

Realizando esse processo repetidas vezes, vamos encontrar uma sequência $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\geq 1}$ em que $p_j \in \mathbb{N}$ e $q_j \in \{9^2, 10^9 99^2, 10^{189} 999^2, ..., 10^{n_k}(10^k-1)^2\}$ tal que:

$$\left|c - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^{4,5}}.$$

Nosso objetivo agora consiste em mostrar que a constante de Champernowne é transcendente, ou seja, não é um número algébrico.

Para isso, vamos supor que c seja algébrico.

Pelo corolário de Roth, corolário 6.1, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que:

$$\left|c - \frac{p}{q}\right| > \frac{k}{q^{2+\epsilon}}, \text{ para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Considere $\epsilon = \frac{1}{2} = 0{,}5$ e a sequência de racionais construída acima. Assim,

$$\frac{k}{q_j^{2,5}} < \left|c - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q_j^{4,5}}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}, \text{ em que } k < q_j^{-2}.$$

Mas, como $(q_j)_{j\geq 1}$ é ilimitada, temos uma contradição. Logo, a constante de Champernowne (c) é um número transcendente. □

Como vimos, a constante de Champernowne é um número transcendente. Sabendo disso, podemos nos perguntar se existem números que são transcendentes mas, não são números de Liouville.

6.2 A constante de Champernowne não é um número de Liouville

Visto que a constante de Champernowne é um número irracional, podemos calcular sua medida de irracionalidade.

Definição 6.1: Dado $\alpha \in \mathbb{Q}^c$, chamamos de medida de irracionalidade de α, o número real positivo $\mu(\alpha) = \mu$, tal que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{\mu}}, \text{ para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Teorema 6.3: A constante de Champernowne não é um número de Liouville.

Demonstração. Massaki Amou mostrou, em [1], que a medida de irracionalidade de c é 10, ou seja, $\mu(c) = 10$, isto é:

$$\left|c - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{10}}, \text{ para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Vamos supor que c é um número de Liouville, então existe uma sequência de racionais distintos $\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\}_{j\geq 1}$, com $q_j > 1$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$ tal que:

$$\frac{1}{q_j^{10}} < \left|c - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^{j}},$$

em que $q_j^{j-10} < 1$, o que contradiz o fato de q_j ser ilimitada.

Logo, a constante de Champernowne (c) não é um número de Liouville. □

Assim, existem números transcendentes que não são de Liouville.

7
A Transcendência do e

Foi visto no capítulo 3 deste trabalho que o número de Euler é um número irracional. O intuito desse capítulo é demonstrar sua transcendência; para isso, serão resolvidos 10 exercícios, que serão apresentados como lemas, os quais foram enunciados no livro do Djairo Guedes de Figueiredo, em [6]. No primeiro deles iremos supor por absurdo que e seja um número algébrio e no decorrer de cada um deles construiremos argumentos para mostrarmos uma contradição. Para este estudo, foram utilizadas as referências [2], [6], [11] e [16].

Lema 7.1: Seja $P(x)$ um polinômio de grau r. Definimos a função $F(x) = P(x) + P^{(1)}(x) + ... + P^{(r)}(x)$, em que $P^{(r)}$ representa a derivada de ordem r de P, então:

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}P(x).$$

Demonstração. Temos:

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = \frac{d}{dx}(e^{-x}(P(x) + P^{(1)}(x) + ... + P^{(r)}(x)) =$$

$$-e^{-x}(P(x) + P^{(1)}(x) + ... + P^{(r)}(x)) + e^{-x}(P^{(1)}(x) + ... + P^{(r)}(x) + P^{(r+1)}(x)) =$$

$$e^{-x}(-P(x) - P^{(1)}(x) - ... - P^{(r)}(x) + P^{(1)}(x) + ... + P^{(r)}(x) + P^{(r+1)}(x)) =$$

$$e^{-x}(-P(x) + P^{(r+1)}(x)) = -e^{-x}P(x) + e^{-x}P^{(r+1)}(x).$$

Como $F(x)$ tem ordem r, $P^{(r+1)}(x) = 0$. Logo,

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}P(x),$$

como queríamos mostrar. □

Lema 7.2: Sejam as funções $F(x)$ e $P(x)$ definidas no lema 7.1. Temos que $F(k) - e^kF(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$ para todo $k > 0$, em que θ_k é um número entre 0 e 1.

Demonstração. Seja $k > 0$ um número real.

Vamos definir a função:

$$g : [0, k] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = e^{-x}F(x).$$

Observe que para todo $k > 0$, g é contínua no intervalo $[0,\ k]$ e derivável em $(0, k)$. Então, pelo teorema do valor médio, resultado visto no teorema 2.5, existe $c \in (0, k)$ tal que:

$$\frac{[g(k) - g(0)]}{(k - 0)} = g'(c).$$

Pelo lema 7.1, a igualdade $g(k) - g(0) = g'(c)(k - 0)$ implica que:

$$e^{-k}F(k) - e^{0}F(0) = -e^{-c}P(c)(k).$$

Portanto,

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -ke^{-c}P(c). \tag{7.1}$$

Note que, $c \in (0, k)$. Logo, existe $\theta_k \in (0, 1)$, tal que:

$$c = k\theta_k. \tag{7.2}$$

Substituindo 7.2 em 7.1, temos:

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -k(e^{(-k\theta_k)}P(k\theta_k)).$$

Multiplicando ambos os membros por e^k, temos:

$$e^{k}[e^{-k}F(k) - F(0)] = e^{k}[-k(e^{(-k\theta_k)}P(k\theta_k))],$$

$$F(k) - e^{k}F(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k).$$

□

Lema 7.3: Seja $a_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$ e $F(x)$ definida pelo lema 7.1. Suponha que e seja algébrico, isto é, existem inteiros $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$, podemos supor $c_0 > 0$, tais que $c_ne^n + ... + c_1e + c_0 = 0$. Então:

$$c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n) = c_1a_1 + ... + c_na_n. \tag{7.3}$$

Demonstração. Pelo lema 7.2, provamos que $a_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k) = F(k) - e^kF(0)$.

Partindo do lado direito da igualdade em 7.3, para $k \in \{1, ..., n\}$, temos:

$$c_1a_1+...+c_na_n = c_1(F(1)-eF(0))+c_2(F(2)-e^2F(0))+...+c_n(F(n)-e^nF(0)) =$$

$$c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n) - (c_1eF(0) + c_2e^2F(0) + ... + c_ne^nF(0)) =$$

$$c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n) - F(0)(c_1e + c_2e^2 + ... + c_ne^n) =$$

$$c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n) + F(0)(-c_1e - c_2e^2 - ... - c_ne^n)$$

Observe que $(-c_1e - c_2e^2 - ... - c_ne^n) = c_0$, ou seja, a expressão acima é igual a:

$$c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n).$$

E, portanto

$$c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + ... + c_nF(n) = c_1a_1 + ... + c_na_n.$$

□

Considere o polinômio

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p...(n-x)^p, \tag{7.4}$$

sendo p um primo tal que $p > n$, $p > c_0$, sendo n e c_0 dados no lema anterior.

A partir de agora, nosso objetivo será mostrar que, para tal polinômio, o lado esquerdo da equação em 7.3 é um número inteiro não nulo e não divisível por p, enquanto o lado direito tem módulo menor que 1, caracterizando um absurdo.

Lema 7.4: Seja $Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_jx^j$ um polinômio com coeficientes inteiros e seja $p < r$, então:

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!}a_jx^{j-i},\ i \leq r, \tag{7.5}$$

em que $Q^{(i)}$ é a derivada de ordem i de Q.

1. Seja $Q^{(i)}(x)$ definida em 7.5, então:

$$\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x),\ \text{para } i \geq p, \tag{7.6}$$

é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

Demonstração. Primeiro mostraremos que a expressão em 7.5 é válida. A prova será por indução.

1º passo: Vamos verificar se $Q^{(i)}(x)$ é válida para $i = 1$.

$$Q^{(1)}(x) = (Q(x))' = \left(\sum_{j=1}^{r} a_jx^j\right)' = (a_0x^0 + ax^1 + ... + a_rx^r)' =$$

$$(a_1x)' + (a_2x^2)' + ... + (a_rx^r)' =$$

$$a_1x^{1-1} + 2a_2x^{2-1} + ... + ra_rx^{r-1} =$$

$$\frac{1!}{(1-1)!}a_1x^{1-1} + \frac{2!}{(2-1)!}a_2x^{2-1} + ... + \frac{r!}{(r-1)!}a_rx^{r-1} =$$

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{j!}{(j-1)!}a_jx^{j-1}.$$

Logo, a expressão em 7.5 é válida para $i=1$.
2º passo: Hipótese de indução: $Q^{(i)}$ seja válida para $i=k$, ou seja:

$$Q^{(k)}(x)=\sum_{j=k}^{r}\frac{j!}{(j-k)!}a_jx^{j-k}.$$

Para isso, vamos mostrar que a expressão em 7.5 é válida para $Q^{(k+1)}(x)$.

$$Q^{(k+1)}(x)=(Q^{(k)}(x))'=\left(\sum_{j=k}^{r}\frac{j!}{(j-k)!}a_jx^{j-k}\right)'=$$

$$\left(\frac{k!}{(k-k)!}a_kx^{k-k}+\frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!}a_{k+1}x^{(k+1)-k}+...+\frac{r!}{(r-k)!}a_rx^{r-k}\right)'=$$

$$((k+1)-k)\frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!}a_{k+1}x^{(k+1-k)-1}+...+(r-k)\frac{r!}{(r-k)!}a_rx^{(r-k)-1}. \tag{7.7}$$

Note que:

- $\dfrac{(k+1)!}{((k+1)-k)!}=\dfrac{(k+1)!}{((k+1)-(k+1))!}.$
- $(r-k)\dfrac{r!}{(r-k)!}=\dfrac{(r-k)}{(r-k)}\dfrac{r!}{(r-(k+1))!}=\dfrac{r!}{(r-(k+1))!}.$

Substituindo os resultados acima na equação 7.7, temos:

$$\frac{(k+1)!}{((k+1)-(k+1))!}a_{k+1}x^{((k+1)-(k+1))}+...+\frac{r!}{(r-(k+1))!}a_rx^{r-(k+1)}=$$

$$\sum_{j=k+1}^{r}\frac{j!}{(j-(k+1))!}a_jx^{j-(k+1)}.$$

Assim, pelo princípio de indução finita, a expressão 7.5 é válida, para $i\le r$.

1. Agora, vamos mostrar que a expressão $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$, para $i\ge p$, dada no item (1) do Lema 7.4, é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

Substituindo $Q^{(i)}(x)$, definida em 7.5 na expressão $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$, temos:

$$\frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{j=i}^{r}\frac{j!}{(j-i)!}a_jx^{j-i}\right)=$$

$$\sum_{j=i}^{r} \frac{1}{(p-1)!} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i},$$

em que cada coeficiente é da forma: $b_j = \dfrac{1}{(p-1)!} \dfrac{j!}{(j-i)!} a_j$.

Queremos mostrar que cada coeficiente desse polinômio é um número inteiro, divisível por p, ou seja, que existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $b_j = pk$.

Note que $\dfrac{1}{(p-1)!} = \dfrac{p}{p!}$, então:

$$b_j = \frac{p}{p!} \frac{j!}{(j-i)!} a_j = p \frac{j!}{p!(j-i)!} a_j.$$

Considerando $k = \dfrac{j!}{p!(j-i)!} a_j$, temos que, de fato, $b_j = pk$. Provaremos que k é inteiro.

Por hipótese, $a_j \in \mathbb{Z}$, então basta mostrar que $\dfrac{j!}{p!(j-i)!} \in \mathbb{Z}$.

De fato,

$$\frac{j!}{p!(j-i)!} = \frac{i!j!}{p!i!(j-i)!} = \frac{i!}{p!} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}.$$

Como $i \geq p$, $\dfrac{i!}{p!} \in \mathbb{Z}$.

Logo $\dfrac{i!}{p!} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma, temos que todos os coeficientes de $\frac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x)$, com $i \geq p$, são inteiros e divisíveis por p. □

Lema 7.5: Seja $P(x)$ definido em 7.4. Então $P(x)$ é da forma:

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!} x^p + ...$$

E, ainda,

1. $P^{(i)}(k) = 0;\ k = 1, ..., n;\ i < p$.
2. $P^{(p-1)}(0) = (n!)$ e $P^{(i)}(0) = 0;\ i < p-1$.

Demonstração. Note que cada fator de $P(x)$ pode ser escrito como:

$(1-x)^p = 1^p + p(-x) + ... + p(-x)^{p-1} + (-x)^p$
$(2-x)^p = 2^p + p2^{p-1}(-x) + ... + p2(-x)^{p-1} + (-x)^p$
$(3-x)^p = 3^p + p3^{p-1}(-x) + ... + p3(-x)^{p-1} + (-x)^p$
$\vdots$
$(n-x)^p = n^p + pn^{p-1}(-x) + ... + pn(-x)^{p-1} + (-x)^p$

Substituindo esses resultados em $P(x)$, temos:

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1^p + p(-x) + ... + p(-x)^{p-1} + (-x)^p)...$$

$$(n^p + pn^{p-1}(-x) + ... + pn(-x)^{p-1} + (-x)^p) =$$

$$\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1^p 2^p 3^p ... n^p + xb_0 + ...),$$

sendo $b_0 = -(p2^p3^p...n^p + p2^{p-1}3^p...n^p + p2^p3^{p-1}...n^p + ... + p2^p3^p...n^{p-1})$.

A expressão acima é igual a:

$$\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}((n!)^p + xb_0 + ...) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0x^p}{(p-1)!} + ... \, .$$

1. Observe que $1, ..., n$ são raízes de multiplicidade p de $P(x)$.
   Como o grau de P é maior que p, temos que $1, ..., n$ são raízes das derivadas de ordens menores que p.
   Podemos escrever $P(x) = (k - x)^p g(x)$, tal que:

   $$g(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p...((k-1)-x)^p((k+1)-x)^p...(n-x)^p.$$

   Assim, pela regra do produto, temos:

   $$P'(x) = p(k-x)^{p-1}(-1)g(x) + (k-x)^p g'(x) =$$

   $$-p(k-x)^{p-1}g(x) + (k-x)^p g'(x) =$$

   $$(k-x)^{p-1}(-pg(x) + (k-x)g'(x)) =$$

   $$(k-x)^{p-1}g_1(x),$$

   em que $g_1(x) = -pg(x) + (k-x)g'(x)$.
   Assim, temos que $P^{(1)}(x) = (k-x)^{p-1}g_1(x)$.
   Generalizando, temos:

   $$P^{(i)}(x) = (k-x)^{p-1}g_i(x).$$

   Dessa forma, temos que $P^{(i)}(k) = 0$, para $k = 1, 2, ..., n$ e $i < p$.
2. Observe que $P^{(p-1)}(x) = \dfrac{(n!)^p}{(p-1)!}(p-1)! + \dfrac{b_0xp!}{(p-1)!} +$(parcelas com a variável x)
   Logo, $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$.
   Por outro lado, para $i < p-1$, todas as parcelas de $P^{(i)}(x)$, possuem a variável x, logo, quando $x = 0, P^{(i)}(0) = 0$.

$\square$

Lema 7.6: Considere os lemas 7.4 e 7.5. $F(k)$, para $k = 1, ..., n$, é um inteiro divisível por p e, ainda, $F(0)$ é um inteiro não divisível por p.

Demonstração. Como foi definido no lema 7.1, $F(k) = P(k) + P^{(1)}(k) + ... + P^{(p-1)}(k) + P^{(p)}(k)$.

Vamos mostrar que $F(k)$ é um inteiro divisível por p.

Pelo lema 7.5 vimos que $P^{(i)}(k) = 0$ para $k = 1, ..., n;\ i < p$. Logo, $F(k) = P^{(p)}(k)$. No lema 7.4, vimos ainda que, $P^{(i)}(x)$, para $i \geq p$, é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

Fazendo $x = k;\ k \in \{1, ..., n\}$, temos que:

$P^{(p)}(k)$ é uma soma cujas parcelas são inteiras e divisíveis por p. Consequentemente $P^{(p)}(k)$ é um inteiro divisível por p.

Assim, como $F(k) = P^{(p)}(k)$, temos que $F(k)$ é divisível por p.

Por último, vamos mostrar que $F(0)$ não é divisível por p.

Temos $F(0) = P(0)+P^{(1)}(0)+...+P^{(p-1)}(0)+P^{(p)}(0)$. Pelo lema 7.5, vimos que $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ e $P^{(i)}(0) = 0$, para $i < p - 1$. Logo, $F(0) = P^{(p-1)}(0) + P^{(p)}(0)$.

Note que, $P^{(p)}(x) = \frac{b_0 p!}{(p-1)!}$ + (parcelas com a variável x), então $P^{(p)}(0) = b_0 p$.

Dessa forma, temos que:

$$F(0) = (n!)^p + b_0 p,$$

que não pode ser divisível por p, já que se fosse, teríamos que $(n!)^p$ é divisível por p, que é um absurdo, pois $p > n$ e p é primo. □

Lema 7.7: Se $d_i;\ i = 0, 1, ..., r$ são inteiros, tais que d_i, para $i \geq 1$, são divisíveis por p e d_0 não é divisível por p, então $\sum_{i=0}^{r} d_i$ não é divisível por p.

Demonstração. Vamos supor por absurdo que $\sum_{i=0}^{r} d_i$ seja divisível por p. Logo, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$\sum_{i=0}^{r} d_i = kp. \tag{7.8}$$

E, mais ainda, como d_i para $1 \leq i \leq r$, então existe $k_i \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$d_i = k_i p;\ i = 1, ..., r. \tag{7.9}$$

Dessa forma, temos por 7.8 que:

$$kp = \sum_{i=0}^{r} d_i = d_0 + d_1 + ... + d_r.$$

Mas, por 7.9:

$$d_0 + k_1 p + k_2 p + ... + k_r p =$$

$$d_0 + (k_1 + k_2 + ... + k_r)p.$$

Isto implica que

$$d_0 = kp - (k_1 + k_2 + ... + k_r)p = (k - (k_1 + k_2 + ... + k_r))p \in \mathbb{Z}.$$

Mas, por hipótese, d_0 não é divisível por p. Absurdo. □

Lema 7.8: Considere os lemas 7.6 e 7.7. Como $0 < c_0 < p$ então, $c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$ é um inteiro não divisível por p.

Demonstração. Pelo lema 7.6, temos que $F(k)$, para $k = 1, ..., n$, é um inteiro divisível por p. Assim, como $c_k \in \mathbb{Z}$, podemos dizer que:

$$c_kF(k) = d_k, \text{ para } k = 1, ..., n, \text{ em que } d_k \text{ é um inteiro divisível por } p.$$

Ainda pelo lema 7.6, vimos que $F(0)$ é um inteiro não divisível por p e como $0 < c_0 < p$ e p é primo, temos que c_0 não é divisível por p. Seja $d_0 = c_0F(0)$, no qual d_0 é um inteiro não divisível por p.

Pelo lema 7.7, temos que $\sum_{k=0}^{n} d_k$ é não divisível por p. Mas pela forma que construímos, temos que

$$\sum_{k=0}^{n} d_k = c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$$

e, portanto, $c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$ é um inteiro não divisível por p. □

Lema 7.9: Seja $0 < \theta_k < 1$, então:

$$|a_k| \leq \frac{|e^n n^p (n!)^p|}{(p-1)!}, \text{ para } k \leq n.$$

Demonstração. Observe que os $a_k's$, definidos no lema 7.3, e calculados para o polinômio $P(x)$, definido no lema 7.6, têm a forma:

$$a_k = -ke^{k(1-\theta_k)} \frac{1}{(p-1)!} (k\theta_k)^{p-1} (1 - k\theta_k)^p ... (n - k\theta_k)^p.$$

Seja a_k, definido acima, em que $0 < \theta_k < 1$ e $k \leq n$.

Aplicando a função módulo em ambos os lados, temos:

$$|a_k| = \left| -ke^{k(1-\theta_k)} \frac{1}{(p-1)!} (k\theta_k)^{p-1} (1 - k\theta_k)^p ... (n - k\theta_k)^p \right|.$$

Como $0 < \theta_k < 1$, temos $(j - k\theta_k) < j$ para $j = 1, ..., n$, logo:

$$|a_k| < \frac{1}{(p-1)!} \left| -ke^{k(1-\theta_k)} (k)^{p-1} (\theta_k)^{p-1} 1^p 2^p ... n^p \right|.$$

Da mesma forma, como $0 < \theta_k < 1$, temos $k(1 - \theta_k) < k$, ou seja:

$$|a_k| < \frac{1}{(p-1)!} | - ke^k (k)^{p-1} (\theta_k)^{p-1} (n!)^p| = \frac{1}{(p-1)!} | - k^p e^k \theta_k^{p-1} (n!)^p| <$$

$$\frac{1}{(p-1)!} |k^p e^k 1^{p-1} (n!)^p| = \frac{|k^p e^k (n!)^p|}{(p-1)!}.$$

Ou seja, $|a_k| < \dfrac{|k^p e^k (n!)^p|}{(p-1)!}$ e, como $k \leq n$, temos que:

$$|a_k| \leq \frac{|n^p e^n (n!)^p|}{(p-1)!},$$

como queríamos mostrar. □

Lema 7.10: Se p for um número primo suficientemente grande, então:

$$|c_1 a_1 + ... + c_n a_n| < 1.$$

Demonstração. Note que:

$$|c_1 a_1 + ... + c_n a_n| \leq |c_1 a_1| + |c_2 a_2| + ... + |c_n a_n| = |c_1||a_1| + |c_2||a_2| + ... + |c_n||a_n|.$$

Pelo lema 7.9, mostramos que $|a_k| \leq \dfrac{|n^p e^n (n!)^p|}{(p-1)!}$, logo:

$$|c_1||a_1| + |c_2||a_2| + ... + |c_n||a_n| \leq |c_1| \frac{|n^p e^n (n!)^p|}{(p-1)!} + |c_2| \frac{|n^p e^n (n!)^p|}{(p-1)!} + ... + |c_n| \frac{|n^p e^n (n!)^p|}{(p-1)!} =$$

$$(|c_1| + ... + |c_n|) \left(\frac{|n^p e^n (n!)^p|}{(p-1)!} \right).$$

Fazendo $|c_1| + ... + |c_n| = C$, temos:

$$|c_1 a_1 + ... + c_n a_n| \leq \frac{C|n^p e^n (n!)^p|}{(p-1)!}.$$

Note que $\lim_{p \to \infty} \dfrac{C|n^p e^n (n!)^p|}{(p-1)!} = 0$. Dessa forma, para $p > c_0$, $p > n$ suficientemente grande, temos que:

$$\frac{C|n^p e^n (n!)^p|}{(p-1)!} < 1.$$

Ou seja,

$$|c_1 a_1 + ... + c_n a_n| < 1.$$

□

Teorema 7.1: O número e é transcendente.

Demonstração. Pelo lema 7.3, supomos por absurdo que o número e era algébrico, ou seja, que existiriam inteiros $c_0, c_1, ..., c_n$, com $c_0 > 0$, tais que $c_n e^n + ... c_1 e + c_0 = 0$; e assim encontramos que $c_0 F(0) + c_1 F(1) + ... + c_n F(n) = c_1 a_1 + ... + c_n a_n$.

Pelo lema 7.8, concluímos que $c_0 F(0) + c_1 F(1) + ... + c_n F(n)$ é um inteiro não divisível por p, em contrapartida, pelo lema 7.10, temos que, nas mesmas condições, $|c_1 a_1 + ... + c_n a_n| < 1$. O que é um absurdo, pois um número inteiro não nulo tem módulo sempre maior ou igual que 1.

Portanto, e é um número transcendente. □

8

A Transcendência do π

A demonstração da irracionalidade do π foi apresentada no capítulo 3 deste trabalho. Nosso objetivo agora é provar a transcendência do π. A demonstração que apresentaremos será baseada na de R. Moritz, com uma correção na aplicação do teorema do valor médio para números complexos. Para isso, iremos utilizar os conceitos abordados no capítulo 2, nas seções de variáveis complexas e polinômios simétricos.

Como referencial teórico foi utilizado a referência [6].

Por fim, recordemos que a função exponencial complexa é definida por $exp(z) = e^x(cos(y) + isen(y))$, sendo $z = x + iy$.

Teorema 8.1: O número π é transcendente.

Demonstração. Vamos supor por absurdo que π seja algébrico. Logo $i\pi$, com $i = \sqrt{-1}$, também será algébrico, pois é produto de dois algébricos.

Como $i\pi$ é algébrico, então será raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros $P_1(x)$. Assim, podemos representar as raízes de $P_1(x)$ por $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Como $e^{i\pi} = -1$, segue que:

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + e^{\alpha_j}) = 0.$$

Desenvolvendo o produtório acima, chegamos a expressão (1+ somatório de exponencias), em que os expoentes são:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n & (8.0.1) \\ \alpha_i + \alpha_j \text{ para todos } i < j & (8.0.2) \\ \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k \text{ para todos } i < j < k & (8.0.3) \\ \quad\vdots & \\ \alpha_i + \alpha_j + ... + \alpha_n. & (8.0.n) \end{array}$$

Com respeito às exponenciais, note que 8.0.1 possui n termos; 8.0.2, $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$

termos; 8.0.3, $\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$ termos, e 8.0.n, $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$ termo. Tais que $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ são coeficientes binominais da forma $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ para $0 \leq m \leq n$.

Agora, como $\alpha_1, ..., \alpha_n$ satisfazem uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros, segue que:

- Os números em 8.0.2 satisfazem uma equação polinomial de grau $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ com coeficientes inteiros. Seja essa $P_2(x) = 0$.
- Da mesma forma, os números em 8.0.3 satisfazem uma equação polinomial de grau $\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$, com coeficientes inteiros, vamos chamá-la de $P_3(x) = 0$.

E assim, sucessivamente.

No geral, os números de 8.0.1, 8.0.2, 8.0.3, ..., 8.0.n, satisfazem uma equação polinomial com coeficientes inteiros da forma:

$$P_1(x)P_2(x)...P_n(x) = 0, \tag{8.1}$$

tal que o grau dessa equação é:

$$n + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^n - 1.$$

Como alguns números das equações $P_j's$ podem se anular, suponhamos que m deles sejam não nulos. Vamos representá-los por $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$.

Assim, simplificando de 8.1 os fatores da forma x^q, para $q > 0$, caso haja, (e haverá se $2^n - 1 > m$) obtemos que $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ são raízes de uma equação da forma:

$$R(x) = cx^m + c_{m-1}x^{m-1} + ... + c_1x + c_0. \tag{8.2}$$

Dessa forma, efetuando o produto de $\prod_{j=1}^{n}(1 + e^{\alpha_j}) = 0$, obtemos:

$$k + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + ... + e^{\beta_m} = 0. \tag{8.3}$$

Agora, considere o polinômio:

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}x^{p-1}(R(x))^p, \tag{8.4}$$

em que $s = mp - 1$ e p é um número primo a ser escolhido posteriormente.

Temos que o grau de P é $r = s + p$.

Seja

$$F(x) = P(x) + P'(x) + ... + P^{(r)}, \tag{8.5}$$

no qual $P^{(r)}$ representa a derivada de ordem r de P.

Segue, pelo lema 7.1, que: $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}P(x)$.

Aplicando o teorema 2.7 à função $f(z) = e^{-z}F(z)$, temos:

$$|e^{-\beta_j}F(\beta_j) - F(0)| \leq 2|\beta_j|sup\{|e^{-\lambda\beta_j}P(\lambda\beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1\} \text{ para } j = 1, ..., m. \tag{8.6}$$

Fazendo $\epsilon_j = 2|\beta_j|sup\{|e^{(1-\lambda)\beta_j}P(\lambda\beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, obtemos de 8.6 que:

$$|F(\beta_j) - e^{\beta_j}F(0)| \leq \epsilon_j. \tag{8.7}$$

Utilizando os resultados obtidos em 8.3 e 8.7, para $j = 1, ..., m$, temos:

$$\left|kF(0) + \sum_{j=1}^{m} F(\beta_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \epsilon_j. \tag{8.8}$$

Nosso objetivo agora é mostrar que o lado esquerdo da relação acima é um inteiro não nulo, e que o lado direito, para p conveniente, é menor que 1.

Para isso, devemos calcular as várias derivadas de $P(x)$ nos pontos $0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$.

Pelo lema 7.5, podemos observar que para as derivadas de ordem $i < p$. O polinômio em 8.4 é da forma $P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}\{c_0^p x^{p-1} + bx^p + ...\}$.

Logo,

$$P^{(i)}(0) = 0, \text{ para } i < p - 1 \text{ e } P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p. \tag{8.9}$$

Por outro lado, segue diretamente de $P(x)$ que:

$$P^{(i)}(\beta_j) = 0, \text{ para } i < p, \ j = 1, ..., m, \tag{8.10}$$

uma vez que para as derivadas $P^{(i)}(x)$ com $i < p$, a expressão $R(x)$ é um fator comum e $R(\beta_j) = 0$.

Já analisamos o que acontece com as derivadas de $P(x)$, para $i < p$. Agora, para as derivadas de 8.4, de ordem $i \geq p$, podemos concluir, pelo lema 7.4 que:

$$\text{Os coeficientes de } P^{(i)}(x), i \geq p, \text{ são inteiros e divisíveis por } pc^s. \tag{8.11}$$

Com esses resultados, podemos observar que de 8.9 e 8.11 que:

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0, \tag{8.12}$$

em que k_0 é um inteiro, cujo valor não importa para os nossos propósitos.

Para os demais $F(\beta_j)$, podemos observar que:

$$\sum_{j=1}^{m} F(\beta_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i\geq p} P^{(i)}(\beta_j) = \sum_{i\geq p}\sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j). \tag{8.13}$$

Agora, observe a expressão:

$$\sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j), \text{ para cada } i \text{ fixado, com } p \leq i \leq s+p. \tag{8.14}$$

Por 8.11, o polinômio $P^{(i)}$ tem coeficientes inteiros e divisíveis por pc^s. Além disso, P tem grau $r = s+p$, então, segue que $P^{(i)}$ tem grau $s+p-i \leq s$, pois $p \leq i$.

Dessa forma, a expressão em 8.14 pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j) = pc^s Q(\beta_1, ..., \beta_m), \tag{8.15}$$

em que $Q(\beta_1, ..., \beta_m)$ é um polinômio nos $\beta_{i's}$ de grau menor ou igual a s, com coeficientes inteiros.

Observe que $Q(\beta_1, ..., \beta_m)$ é um polinômio simétrico nos $\beta_{i's}$ com coeficientes inteiros.

Assim, pelo teorema 2.8 existe um polinômio $g(\theta_1, ..., \theta_m)$ de grau menor ou igual a s, com coeficientes inteiros, tal que $\theta_1, ..., \theta_m$, são polinômios simétricos elementares em β_1,..., β_m, tal que:

$$Q(\beta_1, ..., \beta_m) = g(\theta_1, ..., \theta_m). \tag{8.16}$$

Por outro lado, observe que:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= c^{-1}c_{m-1} \\ \theta_2 &= c^{-1}c_{m-2} \\ &\vdots \\ \theta_m &= c^{-1}c_0. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Logo, de 8.15, 8.16 e 8.17, segue-se que $\sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j)$ é um inteiro divisível por p.

Dessa forma, da igualdade em 8.13, concluímos que:

$$\sum_{j=1}^{m} F(\beta_j) = pk_1, \tag{8.18}$$

em que, k_1 é um inteiro cujo valor é irrelevante para nossos propósitos.

Assim sendo, utilizando os resultados obtidos em 8.12 e 8.18, podemos analisar o lado esquerdo da relação em 8.8, em que obtemos:

$$\begin{aligned} |kF(0) + \sum_{j=1}^{m} F(\beta_j)| = |k(c^s c_0^p + pc^s k_0) + pk_1| = \\ |kc^s c_0^p + p(c^s k_0 k + k_1)| = |kc^s c_0^p + pK|, \end{aligned} \tag{8.19}$$

em que $K = c^s k_0 k + k_1$.

Agora, escolhemos o número primo p de modo que ele seja maior que k, c e c_0. Portanto, o inteiro $|kc^s c_0^p + pK|$ não é divisível por p e, consequentemente, é um inteiro não nulo.

Em contrapartida, é necessário fazermos a estimativa do termo $\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j$, correspondente ao lado direito da relação obtida em 8.8.

Assim, seja $M = max(|\beta_1|, ..., |\beta_m|)$.

Logo, para ϵ_j definido anteriormente, temos que:

$$\epsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} sup\{|\lambda\beta_j|^{p-1}|R(\lambda\beta_j)|^p : 0 \leq \lambda \leq 1\}. \tag{8.20}$$

Agora, seja $N = max\{|R(z)| : |z| < m\}$. Assim sendo, a relação em 8.20 nos fornece que:

$$\epsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1} N^p.$$

Como o fatorial domina qualquer exponencial, isto é, $\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n!} = 0$; para qualquer $A > 0$, segue que, para p suficientemente grande, podemos fazer $\epsilon_j < \frac{1}{m+1}$.

Logo,

$$\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j \leq \frac{m}{m+1} < 1. \tag{8.21}$$

O que caracteriza um absurdo, pois, partimos da relação em 8.8 e obtivemos por 8.19 que a expressão do lado esquerdo de 8.8 corresponde a um inteiro não nulo, em contrapartida, o lado direito, como vimos em 8.21, é menor que 1.

□

Assim, provamos que π é um número transcendente e, portanto, não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros.

9

Considerações Finais

A teoria dos números transcendentes teve como pioneiro Joseph Liouville ao agrupar um conjunto seleto de números, aos quais chamou de números de Liouville, que foram os primeiros achados transcendentes. Desenvolver essa pesquisa me propiciou adentrar em um universo da matemática que, até então, por mim, era desconhecido. Para isso, precisei me aventurar mais afundo em alguns conceitos de aritmética, análise, cálculo, variáveis complexas e polinômios simétricos.

Visto que esta teoria ainda apresenta alguns problemas em aberto e questões desafiadoras, deixo como sugestão, para futuros trabalhos de conclusão de curso, o estudo da irracionalidade da constante de Apéry, $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + ...$, em que ζ é a função zeta de Riemann. Roger Apéry provou a irracionalidade desta constante, resultado este conhecido como Teorema de Apéry. Todavia, ainda não se sabe se a constante de Apéry é um número algébrico ou transcendente. Outro problema que caberia futuros estudos seria o estudo da irracionalidade de e^r, com r um número racional, não nulo.

A título de curiosidade, sabe-se que o número e^π é transcendente. Todavia, demais combinações entre os números e e π, como e^e, π^π e π^e aguardam por demonstrações de sua possível transcendência.

Ademais, este trabalho buscou contribuir com o desenvolvimento teórico do tema e despertar a curiosidade em futuros novos pesquisadores do assunto.

Bibliografia

[1] Amou, M. *Approximation to Certain Transcendental Decimal Fractions.* 1991. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X05800393 (acesso em 2 de out. de 2021).

[2] Assis Vasconcelos, G. de e Rizziolli, E. C. *A Irracionalidade e Transcendencia do Número e.* 2013. URL: http://www.rc.unesp.br/igce/pos/profmat/arquivos/dissertacoes/A%20Irracionalidade%20e%20Transcend%C3%AAncia%20do%20N%C3%BAmero%20e.pdf (acesso em 2 de out. de 2021).

[3] Coelho, C. P. M. S. P. *Números, Uma Introdução à Matemática.* 3ª Ed. Editora da Universidade de São Paulo, 2001, p. 250.

[4] Coelho, F. U. e Lilian, M. *Um curso de Álgebra Linear.* EDUSP, 2005, p. 264.

[5] Domingues, H. e Iezzi, G. *Álgebra Moderna.* 4ª Ed. SARAIVA, 2003, p. 371.

[6] Figueiredo, D. G. de. *Números Irracionais e Transcendentes.* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. SBM, 1985, p. 114.

[7] Iezzi, G. *Fundamentos de Matemática Elementar, 6: complexos, polinômios, equações.* 8ª ed. SARAIVA, 2013, p. 260.

[8] Kirilov, A. e Linck, E. M. *Representação Decimal dos Números Racionais.* 2017. URL: https://docs.ufpr.br/~akirilov/ensino/2019/docs/representa_racionais.pdf (acesso em 2 de out. de 2021).

[9] Lequain, I. *Aproximação de um Número Real por Números Racionais.* 1ª Ed. 19º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1993, p. 216.

[10] Lima, E. L. *Análise Real.* 12ª Ed. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2018, p. 198.

[11] Maor, E. *e: A História de um Número.* 7ª Ed. Record, 2012.

[12] Marques, D. *Números Transcendentes: Uma Introdução Quase Informal*, p. 126.

[13] Niven, I. *A Simple Proof That π is Irrational.* 1947. URL: https://projecteuclid.org/journals/bulletin-of-the-american-mathematical-society-new-series/volume-53/issue-6/A-simple-proof-that-pi-is-irrational/bams/1183510788.full (acesso em 2 de out. de 2021).

[14] Niven, I. *Números: Racionais e Irracionais.* SBM, 1984, p. 216.

[15] Oliveira, D. e Hoyos, M. G. C. *Números Transcendentes: Números de Liouville e a Constante de Champernowne.* 2015. URL: https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC%20Diogo%20Oliveira%20versao%20final.pdf (acesso em 2 de out. de 2021).

[16] Oliveira, J. C. de e Gomes, C. C. *Números Irracionais e Transcendentes.* 2009. URL: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/119885/Julimar_Carlos.pdf?sequence=1&isAllowed=y (acesso em 2 de out. de 2021).

[17] Soares, M. G. *Cálculo em uma Variável Complexa.* 3ª Ed. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2003, p. 220.

[18] Vieira, L. et al. *Introdução aos Números Transcendentes e aos Números de Liouville.* 2019. URL: http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/dlm_uploads/2019/05/art7_vol7_2019_PMO_SBM.pdf (acesso em 2 de out. de 2021).