Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Florestal
Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso

Números Surreais e Jogos: Uma Classe de números rica e lúdica

Orientador: Prof. Alexandre Alvarenga Rocha
Orientando(a): Gabriel Singh Bruno

Junho de 2023
Florestal - MG

1 Resumo

Ao longo da história diversas construções dos Reais foram propostas, cada uma delas usando diferentes abordagens, como os cortes de Dedekind e as sequências de Cauchy. As Classes que aqui abordaremos propõem uma construção alternativa idealizada por John H. Conway nos anos 70, batizadas de Números Surreais, e mostram uma diferente abordagem que também constrói os Reais, partindo desde a construção de $\mathbb{N}$, passando por $\mathbb{R}$ e indo além para os cardinais infinitos e outros, tudo isso a partir de simples axiomas e definições que soarão naturais ao leitor após a nossa exposição. Faremos essa construção passo a passo durante nosso trabalho, além de demonstrar que algumas propriedades algébricas e, finalmente, expandiremos nosso foco ao vasto mundo dos Jogos, uma generalização ainda maior dos Surreais que traz ampla utilidade à análise de jogos combinatórios.

2 Introdução

Formalizado primeiramente por John H. Conway, os Números Surreais são providenciam uma forma alternativa de se pensar nos Reais, além de extendê-los de forma "natural", abarcando os infinitesimais e números infinitamente grandes de forma elegante. Este trabalho elucidará o processo de construção dos Números Surreais desde o seu princípio, detalhando as definições essenciais e teoremas que reforçam sua interpretação como uma extensão intuitiva dos Números Reais.

Apesar de não muito conhecidos, os Números Surreais e sua extensão, Jogos, são extremamente úteis para estudo de jogos combinatórios. Neste trabalho iremos abordar primeiramente a construção de tal conjunto (bem como as construções dos Reais é muito abordada), além das demonstrações de propriedades algébricas comumente vistas nos números Reais, mostrando assim que os Surreais de fato atendem às expectativas que esperamos de uma construção paralela à $\mathbb{R}$.

Aprofundaremos ainda mais o estudo ao expandir para o Conjunto de Jogos, uma versão ainda mais geral dos Números Surreais. Exemplos práticos de jogos que exemplificam a utilidade e o interesse desses sistemas serão apresentados, destacando a relevância e a aplicabilidade de tais conceitos. Ao final deste trabalho o leitor estará mais familiarizado com estes sistemas, podendo assim continuar desvendando a vasta beleza e complexidade destes sistemas numéricos, tornando-os acessíveis e úteis para uma gama mais ampla de aplicações em teoria dos jogos, matemática e além.

3 Números

3.1 Definições

O conjunto dos Números que estudaremos neste trabalho não é igual ao que estamos acostumados a tratar em cálculo e álgebra usuais, embora os que aqui veremos possuam as mesmas propriedades algébricas que já estamos acostumados. Pode demorar algum tempo para o leitor se familiarizar e conquistar alguma liberdade e autonomia para lidar com esta nova maneira de definir e operar os números, porém ao longo do capítulo procuraremos fazer isto. Veremos aqui algumas definições e exemplos sobre os Números Surreais, definidos abaixo.

Definição 3.1. ***(Número)***
Sejam L e R conjuntos de números tal que nenhum membro de L é $\geqslant$ qualquer membro de R, então existe um número $\{L \mid R\}$. Todos os números são construídos dessa maneira.

Nota 3.1. ***(Notação)***
Se $x = \{L \mid R\}$, chamamos de x^L o membro genérico de L, e x^R o membro genérico de R. Para o próprio x então escrevemos $x = \{x^L \mid x^R\}$.
$x = \{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$ significa que $x = \{L \mid R\}$, onde $a, b, c, \ldots$ são membros de L e $d, e, f, \ldots$ são membros de R.
*Os objetos que manipularemos são comumente chamados de Números Surreais, porém neste trabalho chamaremos estes objetos apenas de números. Chamaremos o conjunto de todos os números de **No**.*

Definição 3.2. *($x \geqslant y$, $x \leqslant y$, $x \ngeqslant y$)*
Sejam $x, y \in \boldsymbol{No}$, $x = \{x^L \mid x^R\}$, $y = \{y^L \mid y^R\}$, temos que
$x \geqslant y$ se, e somente se, nenhum $x^R \leqslant y$ e $x \leqslant$ nenhum y^L;
$x \leqslant y$ se, e somente se, $y \geqslant x$;
$x \ngeqslant y$ se, e somente se $x \geqslant y$ é falso.

Definição 3.3. *($x = y$, $x > y$, $x < y$)*
Sejam $x, y \in \boldsymbol{No}$, temos que
$x = y$ se, e somente se, $x \geqslant y$ e $y \geqslant x$;
$x > y$ se, e somente se, $x \geqslant y$ e $y \ngeqslant x$;
$x < y$ se, e somente se, $y > x$.

Definição 3.4. *($-x$)*
Seja $x \in \boldsymbol{No}$, $x = \{x^L \mid x^R\}$, temos

$$-x \;=\; \{-x^R \;\mid\; -x^L\}.$$

Definição 3.5. *($x + y$)*
Sejam $x, y \in \boldsymbol{No}$, $x = \{x^L \mid x^R\}$, $y = \{y^L \mid y^R\}$, temos

$$x + y \;=\; \{x^L + y,\; x + y^L \;\mid\; x^R + y,\; x + y^R\}.$$

Talvez as definições pareçam estranhas por serem em sua maioria recursivas e não termos citado nenhuma "base" para nossa construção, porém, fundamentalmente, estamos tratando de conjuntos de números, e mesmo sem conhecermos nenhum número para usarmos como L e R em um primeiro momento, conhecemos um conjunto de números: o vazio.

O mesmo acontece na hora de compararmos números por meio de $\geqslant$. Para obtermos $x \geqslant y$, primeiro precisamos responder questões similares sobre os pares x^R, y e x, y^L, porém estas questões são mais "simples" que a questão original (afinal, só podemos conhecer x após conhecermos x^L e x^R). Assim continuamos com este processo até que somos reduzidos a questões similiares sobre membros do conjunto vazio. É importante notar que *a noção de igualdade é uma relação definida*, e assim, formas diferentes de escrever um mesmo número aparecerão, portanto precisamos distinguir a *forma* $\{L \mid R\}$ de um número do número própriamente dito.

Na definição de oposto e de soma novamente vemos recursão. Assim, para verificarmos o resultado da soma $x+y$, precisamos verificar antes as somas mais simples x^L+y e $x+y^L$, e similarmente $x^R + y$ e $x + y^R$. Previsivelmente, o mesmo fenômeno observado na relação $\geqslant$ acontece, ou seja, eventualmente estaremos tratando de somas com membros do conjunto vazio.

Com estas definições $(\boldsymbol{No}, +)$ forma um Grupo Abeliano totalmente ordenado (como iremos demonstrar em 4.2). Além disso, com uma definição de produto não tão intuitiva[1], $\boldsymbol{No}$ forma um Corpo; este resultado, porém, não será demonstrado neste trabalho.

3.2 Exemplos de Números criados em dias finitos

Esta seção pretende familiarizar o leitor com o método de construção dos números e com o processo de verificação indutiva que será adotada em quase todas as demonstrações ao longo do

[1] $xy \;=\; \{x^Ly + xy^L - x^Ly^L, x^Ry + xy^R - x^Ry^R \;\mid\; x^Ly + xy^R - x^Ly^R, x^Ry + xy^L - x^Ry^L\}.$

trabalho. Veremos alguns números familiares e algumas de suas propriedades nesta seção.

Algumas propriedades que usaremos nesta seção serão verificadas somente em 4. O intuito desta seção é apenas familiarizar o leitor com a manipulação de alguns números simples, sem preocupação com demonstrar todas as passagens que serão feitas.

O número 0

Como comentado na seção anterior, à um primeiro contato pode parecer estranha a definição de Número (3.1) empregada, pois pode parecer que não possuímos alguns números para então usarmos como conjuntos L e R e construirmos a partir daí. Porém é importante notar que mesmo sem previamente conhecer nenhum número, conhecemos um conjunto de números: o conjunto vazio ($\varnothing$).

Assim, o único número que podemos tentar criar a princípio é o número $\{L \mid R\}$ com $L = R = \varnothing$, ou seja, $\{\varnothing \mid \varnothing\}$; ou ainda mesmo $\{\ \mid\ \}$ em notação simplificada que empregaremos a partir de agora. Chamaremos este número de 0.

Podemos nos perguntar se 0 é um número. Ora, 0 é um número desde que tenhamos $L < R$ [2], mas como os conjuntos 0^L e 0^R são vazios, não podemos ter nenhuma desigualdade do tipo $0^L \geqslant 0^R$, e portanto 0 é, de fato, um número.

Podemos verificar, ainda, se $0 \geqslant 0$. Mas isto é verdadeiro, pois não possuímos nenhuma desigualdade do tipo $0^R \leqslant 0$ nem $0 \leqslant 0^L$ (novamente, pois 0^L e 0^R são vazios). Assim, finalmente e felizmente, temos $0 = 0$.

Ainda das definições vistas temos que $-0 = 0 + 0 = 0$, pois não existem elementos em 0^L e 0^R. Portanto podemos ver que o 0 aqui construído mantém algumas propriedades básicas que gostaríamos de preservar de sua construção usual.

Os números 1 **e** -1

Agora munidos do número 0, temos algumas possibilidades para analisarmos na criação de novos números. Podemos fazer combinações com o 0 e $\varnothing$ para tentar criar novos números, portanto, precisamos analisar os potenciais números $\{0 \mid\ \}$, $\{\ \mid 0\}$ e $\{0 \mid 0\}$, mas como já mostramos que $0 \geqslant 0$, então $\{0 \mid 0\}$ não é um número (reveja a definição de número para verificar isto!). Analisemos então os dois outros casos separadamente:

$\{0 \mid\ \}$ é um número? Sim, pois $L < R$ (afinal, $R = \varnothing$). Chamaremos este novo número de 1. $0 \geqslant 1$? Sim, a menos que exista algum 0^R tal que $0^R \leqslant 1$ (não existe), ou exista algum $1^L = \{0\}$ tal que $0 \leqslant 1^L$[3] (ou seja $0 \leq 0$) que é verdadeiro. Portanto, $0 \not\geqslant 1$.

$1 \geqslant 0$? Sim, a menos que exista algum 1^R tal que $1^R \leqslant 0$ (não existe), ou exista algum 0^L tal que $1 \leqslant 0^L$ (não existe). Portanto $1 \geqslant 0$, e assim $1 > 0$.

Ainda podemos verificar se $1 = 1$, para isso verifiquemos que $1 \geqslant 1$. Ora, isto é verdade a menos que exista algum 1^R tal que $1^R \leqslant 1$ (não existe) ou exista algum $1^L = \{0\}$ tal que $1 \leqslant 0$, que já verificamos ser falso. Portanto, $1 = 1$.

---

[2] Aqui fazemos um abuso de notação, pois L e R são conjuntos de números, e não números em si, mas com $L < R$ queremos dizer que $x^L < x^R$ para todo $x^L \in L, x^R \in R$.

[3] Aqui cometemos outro abuso de notação, pois 1^L é um conjunto e 0 um número, mas o que queremos dizer é $0 \leqslant x^L$ para algum $x^L \in 1^L$.

Para o número $\{\ |\ 0\}$ (demonstração de que $\{\ |\ 0\}$ é um número é trivial) daremos o nome de -1. Verificamos que -1 de fato é um caso da definição de $-x$, pois $1 = \{0\ |\ \} \Longrightarrow -1 = \{\ |\ -0\} = \{\ |\ 0\}$. Assim, por simetria, temos $-1 < 0$.

$-1 < 1$? Para isso precisamos ter $1 \geqslant -1$ e $-1 \not\geqslant 1$.

$1 \geqslant -1$? Sim, a menos que exista algum 1^R tal que "..." ou exista algum -1^L tal que "..." (qualquer que seja "..." não pode acontecer pois $1^R = -1^L = \varnothing$), assim $1 \geqslant -1$.

$-1 \geqslant 1$? Sim, a menos que exista algum -1^R tal que $-1^R \leqslant 1$, o que acontece, pois $-1^R = \{0\}$ e $0 \leqslant 1$. Portanto $-1 \not\geqslant 1$, e finalmente $-1 < 1$ como gostaríamos que acontecesse.
Podemos generalizar a última parte deste argumento: se não existe x^R nem y^L, então $x \geqslant y$ sempre será verdadeiro.

Os números 2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ e -2

Agora possuímos algumas combinações a mais de conjuntos para criarmos novos números. Estes são

$$\{\}, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{-1, 0\}, \{0, 1\}, \{-1, 1\}, \{-1, 0, 1\}.$$

Porém precisamos nos lembrar que se quisermos criar novos números, a restrição de que $L < R$ deve ser preservada. Isso restringe nossas possibilidade de novos números aos seguintes números:

$$\{L\ |\ \}, \{\ |\ R\}, \{-1\ |\ 0\}, \{-1\ |\ 0, 1\}, \{-1\ |\ 1\}, \{0\ |\ 1\}, \{-1, 0\ |\ 1\}.$$

Vamos nos antecipar e dar nomes a alguns destes números, e verificaremos depois se os nomes realmente são consistentes com os usuais. Assim consideraremos, primeiramente,

$$\{1\ |\ \} = 2, \quad \{\ |\ -1\} = -2, \quad \{0\ |\ 1\} = \tfrac{1}{2}, \quad \{-1\ |\ 0\} = -\tfrac{1}{2}$$

Analisemos um por um cada número.

$\{1\ |\ \} = 2 \geqslant 1$? Sim, a menos que exista algum 2^R tal que "..." (falso) ou exista algum $1^L = \{0\}$ tal que $2 \leqslant 0$. Precisamos então analisar a proposição $2 \leqslant 0$, que é falsa. Podemos demonstrar isto usando o fato de que $1 > 0$, ou seja, que $0 \not\geqslant 1$ e $1 \geqslant 0$; assim, ao analisar se $2 \leqslant 0$ usaríamos o fato de que $1 \not\leqslant 0$ e, portanto, $2 \not\leqslant 0$. Portanto, $2 \geqslant 1$.

Agora, $1 \geqslant 2$? Sim, a menos que exista algum 1^R tal que "..." (falso), ou exista algum $2^L = \{1\}$ tal que $1 \leqslant 1$ (verdadeiro), e, portanto, $1 \not\geqslant 2$, e finalmente $2 > 1$, como esperávamos.

$2 \geqslant 2$? Sim, a menos que exista algum 2^R tal que "..." ou exista algum $2^L = \{1\}$ tal que $2 \leqslant 1$, que é falso. Portanto $2 = 2$. O número $\{\ |\ -1\}$ é um outro caso da definição de $-x$, e portanto seu nome está – pelo menos parcialmente – justificado. Por simetria teremos que $-2 < -1$.

Podemos nos perguntar qual o nome do número $\{0, 1\ |\ \}$. Este número x deve satisfazer $x > 0$ e $x > 1$, mas a segunda desigualdade implica na primeira, e portanto é mais "forte"; ou seja, a primeira desigualdade não nos conta nada de novo sobre x[4]. Portanto, acreditamos que $\{0, 1\ |\ \} = \{1\ |\ \} = 2$. Com o mesmo processo feito para mostrar que $\{1\ |\ \} = 2$, seria possível também demonstrar que, de fato, $\{0, 1\ |\ \} = 2$.

[4] Este processo é chamado (quando tratarmos de Jogos) de "opção dominada". Dizemos que uma opção x^L de um jogo *é dominada* por uma outra opção x'^L quando $x'^L > x^L$. Analogamente, uma opção x^R é dominada por uma outra opção x'^R quando $x'^R < x^R$.

Assim, por um processo similar ao aplicado acima, esperamos as seguintes igualdades:[5]:

$$\begin{aligned}
-2 &= \{\ \mid -1\} = \{\ \mid -1,0\} = \{\ \mid -1,1\} = \{\ \mid -1,0,1\}\\
-1 &= \{\ \mid 0\} = \{\ \mid 0,1\}\\
-\tfrac{1}{2} &= \{-1 \mid 0\} = \{-1 \mid 0,1\}\\
0 &= \{\ \mid\ \} = \{-1 \mid\ \} = \{\ \mid 1\} = \{-1 \mid 1\}\\
\tfrac{1}{2} &= \{0 \mid 1\} = \{-1,0 \mid 1\}\\
1 &= \{0 \mid\ \} = \{-1,0 \mid\ \}\\
2 &= \{1 \mid\ \} = \{0,1 \mid\ \} = \{-1,1 \mid\ \} = \{-1,0,1 \mid\ \}.
\end{aligned}$$

Para automatizar o nosso processo de checagem de cada uma das igualdades, podemos analisar quando um número $X = \{y, x^L \mid x^R\}$ é igual a um número $x = \{x^L \mid x^R\}$.

$X \geqslant x$? Sim, a menos que exista algum X^R tal que $X^R \leqslant x$, ou seja, se $x \geqslant X^R$, que é falso[6], ou exista algum x^L tal que $X \leqslant x^L$, ou seja, se $x^L \leqslant X$, que é falso, pois existe algum X^L tal que $x^L \leqslant X^L$ (afinal todo x^L também é um X^L). Portanto, $X \geqslant x$.

$x \geqslant X$? Sim, a menos que exista algum x^R tal que $x^R \leqslant X$, ou seja $X \geqslant x^R$, que é falso (como visto anteriormente), ou exista algum X^L tal que $x \leqslant X^L$, que só será verdadeiro caso $x \leqslant y$, já que qualquer outro X^L também é um x^L. Assim podemos concluir que se $y \not\geqslant x$, podemos adicionar y às opções L de x sem afetar o valor de x. Simetricamente, podemos adicionar y às opções R de x sem afetar o valor de x desde que $y \not\leqslant x$. Essa demonstração serve de justificativa para todas as igualdades descritas[7].

Não é difícil checar as desigualdades

$$-2 < -1 < -\tfrac{1}{2} < 0 < \tfrac{1}{2} < 1 < 2,$$

que então farão com que os números tenham as mesmas propriedades de ordem que estamos acostumados.

Além da ordem, temos outras formas de justificar os nomes dados aos números construídos até agora com a adição.

Temos pela definição

$$1 + 1 = \{0 + 1,\ 1 + 0 \mid\ \},$$

já que 0 é o único 1^L e não existe 1^R. Então precisamos analisar $1 + 0 = \{0 + 0 \mid\ \mid\ \} = \{0 \mid\ \} = 1$, pois não existe 0^L (analogamente para $0 + 1$). Portanto, como $1 + 0 = 1$[8], teremos $1 + 1 = \{1, 1 \mid\ \} = \{1 \mid\ \} = 2$.

Verifiquemos agora a igualdade $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, para isso temos, por definição

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \{0 + \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} + 0 \mid 1 + \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} + 1\},$$

[5] É importante reforçar: a igualdade a que nos referimos aqui não é a igualdade de conjuntos, e sim a igualdade obtida da relação de ordem definida em (3.2) "$\geqslant$".

[6] De fato, $x \geqslant X^R$ a menos que exista algum x^R tal que $x^R \leqslant X^R$, que é verdadeiro, pois todo x^R também é um X^R.

[7] No caso $\{-1 \mid 1\}$ precisamos usar o processo duas vezes. Ou seja, como $-1 \not\geqslant 0$, temos $\{\ \mid\ \} = \{-1 \mid\ \} = 0$, e como $1 \not\leqslant 0$ temos $\{\ \mid\ \} = \{\ \mid 1\} = \{-1 \mid 1\}$.

[8] De forma mais geral, também temos que $x + 0 = x = 0 + x$, como é esperado.

que, usando que $x+y=y+x$, para todo x,y (cuja prova será feita no próximo capítulo), ficará como

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} \;=\; \{\tfrac{1}{2} \;\mid\; 1+\tfrac{1}{2}\} \;=\; \{\tfrac{1}{2} \mid 1\tfrac{1}{2}\},$$

onde $1\frac{1}{2}$ é um nome temporário para $1+\frac{1}{2}$.

Para verificarmos se $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, verificaremos primeiro se $1 \geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Ora, isto só acontecerá a menos que exista algum 1^R tal que "..." (falso), ou exista algum $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^L=\{\frac{1}{2}\}$ tal que $1 \leqslant \frac{1}{2}$ (falso). Ou seja, $1 \geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

Basta agora verificar se $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \geqslant 1$, mas isso acontecerá a menos que exista algum $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^R=\{1\frac{1}{2}\}$ tal que $1\frac{1}{2} \leqslant 1$ ou exista algum $1^L=\{0\}$ tal que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \leqslant 0$. Verifiquemos estas duas desigualdades.

$1 \geqslant 1\frac{1}{2}$, a menos que exista algum 1^R tal que "...", ou exista algum $1\frac{1}{2}^L=(1+\frac{1}{2})^L=\{0+\frac{1}{2},\ 1+0\}=\{\frac{1}{2},\ 1\}$ tal que $1 \leqslant 1$, portanto $1 \not\geqslant 1\frac{1}{2}$.

$0 \geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, a menos que exista algum 0^R tal que "...", ou exista algum $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^L=\{\frac{1}{2}\}$ tal que $0 \leqslant \frac{1}{2}$, e portanto $0 \not\geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$. Com isso, finalmente, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ como esperávamos. As demonstrações são similares para -2 e $-\frac{1}{2}$.

3.3 Simplicidade dos Números

Abordaremos, brevemente, a noção de "simplicidade" em números, que é melhor formalizada em (CONWAY, 1976). Até agora em nossa construção tivemos x^L e x^R próximos uns aos outros, de certa forma facilitando nossa estimativa ao tentar identificar o valor do número $\{x^L \mid x^R\}$. Podemos, naturalmente, tentar pensar no valor do número $\{-1 \mid 2\}$, que talvez pode parecer estranho a primeira vista. Uma tentativa de nomear $x=\{-1 \mid 2\}$ pode ser $1\frac{1}{2}$, que é a média aritmética de -1 e 2, porém o valor de x é, na verdade, 0.

O processo para checarmos isso é verificando a igualdade $0=x$. Para isso, verificamos se $0 \geqslant x$ e $x \geqslant 0$; mas $0 \geqslant x$ é verdade a menos que exista algum 0^R tal que "..." ou $2 \leqslant 0$ (falso), portanto $0 \geqslant x$.

$x \geqslant 0$? Sim, a menos que $2 \leqslant 0$ (falso) ou exista algum 0^L tal que "..." (falso); portanto, de fato, temos $x=0$.

Portanto percebemos que a "regra da média aritmética" não é válida para estimarmos o valor de novos números, assim, qual seria o valor, por exemplo, do número $\{2\frac{1}{2} \mid 13\}$? Testar possíveis valores para este número não parece ser uma boa saída (dada a quantidade de testes necessários), portanto precisamos de alguma forma de automatizar nossa estimativa de valor de um dado número, e isso é dado pela *regra da simplicidade*, que diz que o valor de um número $x=\{x^L \mid x^R\}$ é o valor do menor número y "construído mais cedo que não é proibido", ou seja, que não contradiz a definição de número (similarmente, para $x^L,\ x^R$ negativos, será o maior número y que é menor que x^R). Assim, o número $\{2\frac{1}{2} \mid 13\}=3$, que é o número mais simples tal que $2\frac{1}{2}<3<13$, e portanto não é proibido.

Esta noção de simplicidade nos ajuda, portanto, a criar classes de equivalências que definem um mesmo número de diferentes maneiras, não causando, assim, nenhum problema ao se definir um mesmo número de diferentes maneiras.

Os números $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 3$ e seus negativos.

Agora que já estamos começando a nos familiarizar e começamos a perceber que $x \geqslant x$ para todo x (e outras trivialidades do tipo), podemos começar a construir novos números mais rapidamente. Por exemplo, se escolhermos como candidatos a L e R os números até agora construídos, veremos que sobram poucas possibilidades se lembrarmos que somente precisamos nos preocupar com o maior dos x^L e o menor dos x^R, assim, isso nos restringirá aos seguintes possíveis números

$$0 \ < \ \{0 \mid \tfrac{1}{2}\} \ < \ \tfrac{1}{2} \ < \ \{\tfrac{1}{2} \mid 1\} \ < \ 1 \ < \ \{1 \mid 2\} \ < \ 2 \ < \ \{2 \mid \}$$

e seus negativos.

Novamente podemos antecipar quais são os nomes apropriados para estes novos números. Por exemplo, suspeitamos que o número $\{2 \mid \} = 3$, e de fato

$$1+1+1 \ = \ \{0+1+1, \ 1+0+1, \ 1+1+0 \ \mid \} \ = \ \{2 \mid \},$$

confirmando nossas expectativas. O número $\{1 \mid 2\}$ tem o valor esperado (claramente) de $1\frac{1}{2}$, que é facilmente verificável e portanto será usado como o nome permanente para ele.

O número $\{0 \mid \frac{1}{2}\}$ pode ter dois nomes prováveis em $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$. Talvez o primeiro seja o que parece ser mais correto, afinal, se este não for $\frac{1}{3}$ que número será ele?[9] Mas, como verificaremos agora, $\{0 \mid \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4}$.

Para verificarmos isso, podemos mostrar que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, e, de fato, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ = \frac{1}{2}$ se, e somente se, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2}$? Sim, a menos que exista algum $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})^R = \{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\}$ tal que $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ (falso)[10] ou exista algum ${\frac{1}{2}}^L = \{0\}$ tal que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leqslant 0$ (obviamente falso). Portanto $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$? Sim, a menos que exista algum ${\frac{1}{2}}^R = \{1\}$ tal que $1 \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (falso, pois $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \geqslant 1$ a menos que exista algum $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})^R = \{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\}$ tal que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leqslant 1$, que é verdadeiro[11]!) ou exista algum $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})^L = \{\frac{1}{4}\}$ tal que $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}$ (obviamente falso). Portanto $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Utilizando o mesmo raciocínio feito ao nomear $\frac{1}{4}$, podemos nomear $\{\frac{1}{2} \mid 1\} = = \frac{3}{4}$. Tomaremos este nome como definitivo, deixando a demonstração para justificá-lo ao leitor. Os negativos dos números aqui construídos seguirão a mesma lógica dos negativos anteriores.

Agora que estamos familiarizados com o processo de construção e demons-tração de algumas propriedades de números criados nos primeiros "dias de nascimento", fica mais fácil adivinhar quais padrões serão preservados na contínua criação de novos números.

Sempre que criamos um novo número $x = \{L \mid R\}$, teremos $x^L < x < x^R$, para todo $x^L \in L, \ x^R \in R$. Assim, cada número x pode "criar" dois novos números ao escolhermos $x \in L$

[9] Veremos que na verdade o número $\frac{1}{3}$ e outras frações similares não serão construídas em "tempo finito", e na verdade só serão construídas após termos infinitas frações de denominador 2^n.

[10] Afinal ${\frac{1}{4}}^L = \{0\}$, e como esperamos que o número $\frac{1}{4}$ seja maior que todas suas opções L, precisamos ter $\frac{1}{4} > 0$. Além disso, se $+$ possui as propriedades de ordem que esperamos (que serão verificadas no próximo capítulo mas tomaremos por verdade aqui), teremos $\frac{1}{4} > 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} + 0$.

[11] Para chegarmos a essa conclusão utilizamos o fato de que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, e como $0 < \{0 \mid \frac{1}{2}\} < \frac{1}{2}$, podemos concluir (novamente utilizando o fato ainda não verificado de que $+$ e $\geqslant$ têm as propriedades usuais) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1$

e $x \in R$ de um novo número e colocando um número "mais antigo" que x como L e R como necessário. Como nosso primeiro número foi $\{ \mid \}$, diremos que nossa "história de criação" começou no *0-ésimo dia*. Assim, os números 1 e -1, que nasceram a partir do número 0, foram criados no *primeiro dia*, etc.

Este processo forma uma espécie de árvore de números. A Figura 1 abaixo mostra esse processo: cada nódulo da árvore possui dois "filhos", um à esquerda do nódulo e um à direita dele. Podemos imaginar que no *n-ésimo dia* os extremos dessa árvore serão $-n$ e n respectivamente, e que cada número na árvore é a média aritmética dos números diretamente à esquerda e direita dele. Felizmente tudo isso realmente acontece e com isso conhecemos a forma geral de um número x criado em qualquer dia n finito.

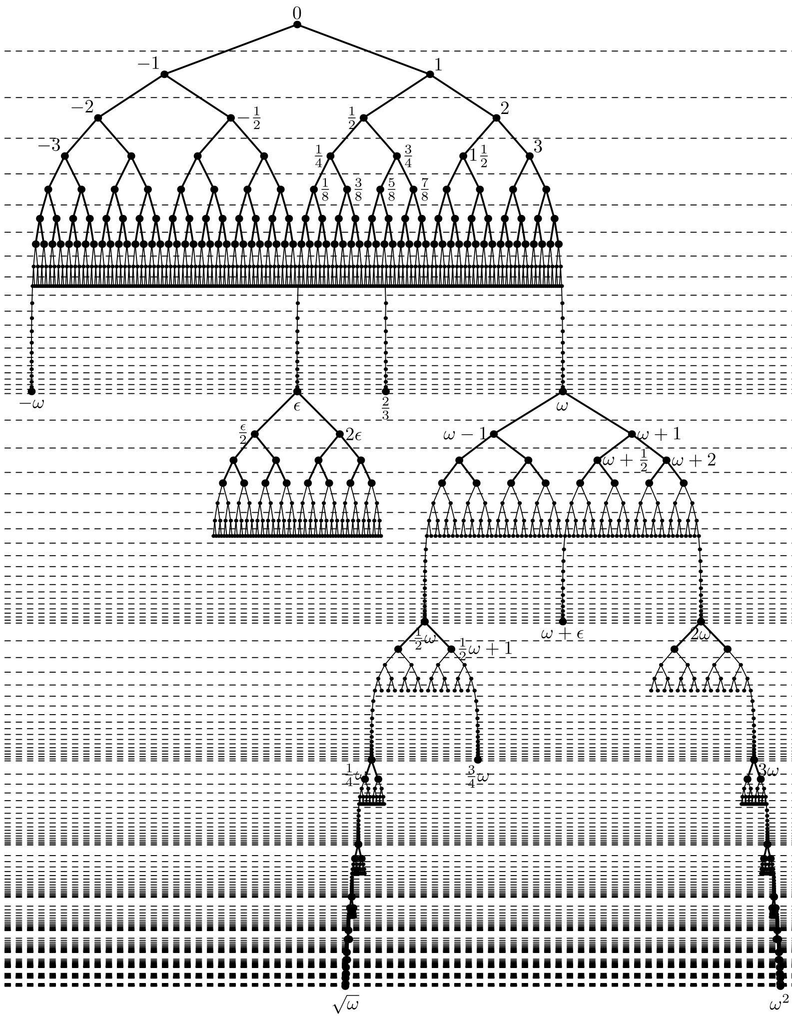

Figura 1: Uma visualização da árvore de números surreais e os dias que eles "nascem."
Fonte: Wikipedia: Surreal Numbers

3.4 Exemplos de Números criados após infinitos dias

Após conhecermos todos os números da forma $k/2^n$ que são criados após finitos *dias*, não paramos nossa criação (muito pelo contrário!). O próximo *dia* vem depois de todos os dias finitos, e é chamado de *dia* ω. Nesse dia o maior número criado será ω, definido como $\{0, 1, 2, 3, \dots \mid \}$. O número ω possui várias outras definições, como por exemplo $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots \mid \}$ ou ainda $\{$todos os números da forma $k/2^n \mid \}$. É importante notar, porém, que não podemos excluir todas as opções de ω^L exceto uma, pois o conjunto x^L não possui um maior elemento.

Para criarmos o número $\frac{1}{3} = \{x^L \mid x^R\}$, que também é criado no *dia* ω, basta escolhermos uma sequência (x_n) crescente de frações do tipo $k/2^n$ tal que $\lim x_n = \frac{1}{3}$ e usarmos os termos de (x_n) como nossa escolha de x^L e depois escolhermos uma sequência (y_n) decrescente de frações do tipo $k/2^n$ tal que $\lim y_n = \frac{1}{3}$ e usarmos os termos de (y_n) como nossa escolha de x^R.

Da mesma forma podemos criar os números $\sqrt{2}$, π e e, por exemplo, assim como qualquer outro $x \in \mathbb{R}$. Este processo funciona para criar-se qualquer Real graças ao fato de que os diádicos são densos em $\mathbb{R}$.

4 A Álgebra de *No*

Neste capítulo demonstraremos algumas propriedades de ***No***, concluindo ao final que ***No*** é Grupo Abeliano sob $+$. ***No*** é, além disso, Corpo sob $+$ e $\cdot$, porém este fato não será demonstrado aqui[12].

Em muitas de nossas demonstrações faremos uso de indução sobre números, isto é, se tivermos uma proposição P sobre um número qualquer $x = \{x^L \mid x^R\}$ (abreviada $P(x)$), então teremos como hipótese de indução que P é válida para x^L e x^R, e tentaremos demonstrar a validade de $P(x)$ supondo válidas as proposições $P(x^L)$ e $P(x^R)$. Para proposições Q sobre pares de números (x, y), teremos como hipótese de indução $Q(x^L, y)$, $Q(x, y^L)$, $Q(x^R, y)$ e $Q(x, y^R)$, que são justificadas como sendo casos de indução simples. Além disso, não necessitamos de garantir nossas proposições para um "primeiro caso", como é feito em proposições sobre $\mathbb{N}$, pois nosso primeiro caso seria sobre 0, e assim estaríamos verificando proposições sobre $\varnothing$.

Precisamos fazer uma distinção também entre igualdade "$=$" e identididade "$\equiv$": diremos que $x \equiv y$ se, e somente se, os conjuntos x^L e y^L forem idênticos (e igualmente para x^R e y^R); para a igualdade, teremos $x = y$ se, e somente se, $x \geqslant y$ e $y \geqslant x$. É importante também notar que dizermos que $1 = \{0 \mid \}$, por exemplo, na verdade invoca somente uma forma de representar 1. Assim, uma melhor definição de 1 seria o conjunto de todos os números surreais x tais que $x = \{0 \mid \}$, ou ainda, que 1 na verdade representa uma classe de equivalência dos números surreais que se relacionam (por meio de $=$) com o número $\{0 \mid \}$.

Apesar das proposições analisadas servirem para números (***No***), elas também servem para uma diferente classe chamada Jogos, cuja definição segue:

Definição 4.1. ***(Jogos)***
Sejam L e R conjuntos de Jogos, existe o jogo $\{L \mid R\}$. Todos os jogos são construídos desta

[12] Para isto, é recomendado ao leitor o primeiro capítulo de (CONWAY, 1976).

forma.

A definição de Jogo é similar à de número, porém sem a restrição de que $x^L < x^R$, para todo x^L, x^R. É evidente que todo número é um Jogo, mas exis-tem Jogos que não são números[13]. Veremos mais a frente em nosso trabalho aplicações das propriedades que demonstraremos neste capítulo. A relação $\geqslant$ e as operações $+, \cdot$ que definimos no primeiro capítulo são as mesmas para Jogos.

As demonstrações deste capítulo se aplicam tanto para números quanto, de forma mais geral, para Jogos, exceto quando evocamos explicitamente a lei específica à números de que $x^L < x^R$, como em **Proposição 4.2**.

4.1 Propriedades de Ordem

Mostraremos aqui que ***No*** é totalmente ordenado, isto é:

Definição 4.2. ***(Parcialmente e Totalmente Ordenado)***
Dizemos que um conjunto X é parcialmente ordenado sob uma relação $\leqslant$ se, e somente se, para todo $a, b, c \in X$
(i) $a \leqslant a$; *(Reflexiva)*
(ii) Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, então $a = b$; *(Antissimetria)*
(iii) Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$, então $a \leqslant c$; *(Transitiva)*
Se, além disso, tivermos
(iv) $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$; *(Totalidade)*
então dizemos que X é totalmente ordenado sob $\leqslant$.

Lembremo-nos que, $x \geqslant y$ se, e somente se, $x^R \nleqslant y$ e $x \nleqslant y^L$.

Proposição 4.1. ***(Ordem Parcial de No sob $\geqslant$)***
No *é parcialmente ordenado sob $\geqslant$.*

Demonstração:
(Reflexividade) Como hipótese de indução temos $x^R \geqslant x^R$ e $x^L \geqslant x^L$. Para provarmos que $x \geqslant x$ basta mostrarmos que $x^R \nleqslant x$ e $x \nleqslant x^L$.

Teremos $x^R \nleqslant x$ somente se $x \geqslant x^R$ for falso. Isto acontecerá se existir desigualdade do tipo $x^R \geqslant x^R$, que é garantida por hipótese de indução.

Para $x \nleqslant x^L$, precisamos que $x^L \geqslant x$ seja falso. Isto acontecerá se existir desigualdade do tipo $x^L \geqslant x^L$, que também é garantida por hipótese de indução.

Assim $x \geqslant x$.

As propriedades de antissimetria e transitividade seguirão um processo similar de indução, e se encontram em detalhe no primeiro capítulo de (CONWAY, 1976). □

[13] Um exemplo simples é $\{0 \mid 0\}$, que já vimos não ser número (afinal, $0 \geqslant 0$), porém é um jogo perfeitamente válido.

Proposição 4.2. ***(Ordem Total de No sob $\geqslant$)***
*Para qualquer $x \in$ **No** temos $x^L < x < x^R$, para todo x^L, x^R. Além disso, **No** é totalmente ordenado sob $\geqslant$.*

Demonstração:
Como hipótese de indução temos $x^{RL} < x^R < x^{RR}$ e $x^{LL} < x^L < x^{LR}$. Além disso, já vimos que $x \not\geqslant x^R$, assim basta mostrarmos que $x^R \geqslant x$ para termos $x < x^R$.

$x^R \leqslant x$ será verdade a menos que $x^{RR} \geqslant x$ ou $x^R \leqslant x^L$. Mas se $x^{RR} \leqslant x$ for verdade, então teremos (pela hipótese de indução) que $x^R < x^{RR} \leqslant x$, ou ainda $x^R < x$, o que é absurdo (afinal, $x \not\geqslant x^R$).

Basta verificarmos agora que não existe desigualdade da forma $x^R \leqslant x^L$, mas tal desigualdade não pode acontecer, pois iria contrariar a definição de número.

Portanto, $x^L < x < x^R$.

Para mostrarmos que ***No*** é totalmente ordenado resta mostrar que para todo $x, y \in$ ***No*** temos $x \geqslant y$ ou $y \geqslant x$.

Se $x \not\geqslant y$, então temos $x^R \leqslant y$ ou $x \leqslant y^L$. Mas $x^R \leqslant y$ implica $x < x^R \leqslant y$, e $x \leqslant y^L$ implica $x \leqslant y^L < y$, e portanto $y \geqslant x$ em ambos os casos.

□

Assim, ***No*** é totalmente ordenado sob $\geqslant$, porém Jogos são somente parcialmente ordenados. Isto significa que existem Jogos x, y tais que não se tem $x \geqslant y$ nem $y \geqslant x$, ou seja, existem Jogos incomparáveis sob $\geqslant$[14].

4.2 Fechamento de *No*

Mostraremos aqui que ***No*** é fechado sob $+$, isto é:

Definição 4.3. ***(Fechamento)***
Dizemos que um conjunto X munido de uma operação $+ : X \times X \longrightarrow X$ é fechado sob $+$ se, e somente se, sejam $x, y \in X$, então $x + y \in X$.

Além disso, mostraremos que $0 = \{ \mid \} \in$ ***No*** e que, se $x \in$ ***No***, então $-x \in$ ***No***.

Proposição 4.3. ***(Boa-definição de $+$, $-$ e 0)***
*Sejam $x, y \in$ **No** números quaisquer, então*
(i) $0 = \{ \mid \} \in$ ***No***.
(ii) $-x \in$ ***No***.
(iii) $x + y \in$ ***No***.

Demonstração:
(i) $0 = \{ \mid \}$ será um número desde que não tenhamos $0^L \geqslant 0^R$. De fato, como não existe um

[14] Um exemplo disso é $\{0 \mid 0\}$, Jogo ao qual damos o nome de $\star$. $\star$ é estritamente maior que qualquer número negativo e estritamente menor que qualquer número positivo, porém $\star \not\geqslant 0$ e $0 \not\geqslant \star$. Assim, $\star$ não está na árvore dos números!

elemento 0^L (afinal, L é o conjunto vazio) nem 0^R, não podemos ter a desigualdade mencionada, e portanto $0 \in \boldsymbol{No}$.

(ii) Temos como hipótese de indução que $-x^L \in \boldsymbol{No}$ (análogo para $-x^R$). Além disso, $x \in \boldsymbol{No}$, e daí $x^L < x < x^R$.

Sendo assim, consideremos o possível número $y = \{-x^R \mid -x^L\}$. y deve ser um número, pois, por indução, $-x^R < -x^L$.

(iii) A hipótese de indução para esta última proposição deve ser que $x + y^L, x^L + y, x + y^R$ e $x^R + y$ estão em $\boldsymbol{No}$. Usando o fato de $x^L < x < x^R$ funciona para todos os números, podemos nos convencer que, de fato, $(x+y)^L < (x+y)^R$, o que faria $x + y$ ser um número. $\square$

4.3 Propriedades de Adição e Elemento Oposto

Mostraremos aqui que $\boldsymbol{No}$ forma Grupo Abeliano com $+$, isto é:

Definição 4.4. ***(Grupo e Grupo Abeliano)***
Dizemos que um conjunto X munido de uma operação $+ : X \times X \longrightarrow X$ é um Grupo se, e somente se, para todo $a, b, c \in X$
(i) $(a+b)+c \equiv a+(b+c)$; *(Associativa)*
(ii) $a + 0 \equiv a$; *(Elemento Neutro)*
(iii) $a + (-a) = 0$; *(Elemento Simétrico)*
Se, além disso, tivermos
(iv) $a + b \equiv b + a$; *(Comutativa)*
então dizemos que X é um Grupo Abeliano.[15]

Lembremo-nos que $x + y \ = \ \{x^L + y,\ x + y^L \ \mid \ x^R + y,\ x + y^R\}$.

Proposição 4.4. ***($(\boldsymbol{No}, +)$ é Grupo Abeliano)***
$\boldsymbol{No}$ munido de $+$ é um Grupo Abeliano.

Demonstração:
Em muitas de nossas demonstrações faremos uso apenas da hipótese indutiva e definição de soma de números, o processo inteiro consiste em utilizar a definição de $+$ e então utilizar a hipótese indutiva até chegarmos do outro lado da igualdade.

(Associatividade)
$$\begin{gathered}(x+y)+z \\ = \{(x+y)^L + z,\ (x+y)+z^L \mid \ldots\} \\ = \{(x^L+y)+z,\ (x+y^L)+z,\ (x+y)+z^L \mid \ldots\} \\ = \{x^L+(y+z),\ x+(y^L+z),\ x+(y+z^L) \mid \ldots\} \\ = x+(y+z).\end{gathered}$$

(Elemento Neutro) $x + 0 = \{x^L + 0 \mid x^R + 0\} = \{x^L \mid x^R\} = x$.

[15] Aqui cometemos um abuso de notação comum, pois um conjunto não pode, sozinho, ser um Grupo Abeliano. Ao invés disso, o correto seria dizer que o par ordenado $(X, +)$ é um Grupo Abeliano.

(Comutatividade)

$$x + y = \{x^L + y,\ x + y^L \mid x^R + y,\ x + y^R\} = \{y + x^L,\ y^L + x \mid y + x^R,\ y^R + x\} = y + x$$

5 Jogos

5.1 Uma nota sobre Jogos

Neste capítulo inteiro trataremos de alguns jogos chamados *jogos combinatórios*, cuja definição segue:

Definição 5.1. ***(Jogo Combinatório)***
Dizemos que um jogo é um jogo combinatório se

(i) *O jogo for jogado entre dois jogadores, oponentes um do outro;*

(ii) *Os jogadores alternarem seus movimentos em alguma forma sequencial; ou ainda, se não houverem jogadas simultâneas;*

(iii) *O jogo possuir posições, onde cada movimento transforma o jogo em uma nova posição;*

(iv) *As possíveis posições de um movimento forem conhecidas por ambos os jogadores a todo momento; ou ainda, se não houverem elementos aleatórios ou movimentos secretos;*

(v) *O jogo possuir um conjunto de posições (chamadas posições terminais) que determinam que o jogo acabou (e portanto que determinam um vencedor e perdedor, ou um empate) bem definido.*

Nota 5.1. *Chamamos atenção ao leitor para a distinção da palavra Jogo (cuja definição é dada em* ***Definição 4.1****) e jogo, cuja definição é informal e comum à todos.*

Para nossa análise de jogos neste trabalho precisamos de um léxico para alguns termos que serão comumente usados em nossos estudos:

Nota 5.2. ***(Terminologia sobre jogos)***

(i) *Posição: Um par ordenado de conjuntos de posições;*

(ii) *Movimento: Ato de escolher uma posição do conjunto de posições. Um movimento de L escolhe da primeira coordenada de uma posição, enquanto R escolhe da segunda coordenada.*

(iii) *Movimento legal: Movimento no qual um jogador consegue, com sucesso, ir da posição atual de jogo para uma outra posição desejada. Inversamente, um movimento é ilegal quando não se pode ir da posição atual para a posição desejada.*

(iv) *Posição inicial: Utilizada comumente para designar a posição de início de um jogo;*

(v) *Posição terminal: Uma posição nos quais os conjuntos de posições que a compõem são ambos vazios.*

Com estes termos definidos, é natural encararmos um jogo combinatório e suas jogadas como um conjunto de posições, umas levadas às outras por meio de movimentos feitos por L e R.

Durante nosso trabalho, iremos dizer que ganha aquele jogador que fizer o último movimento legal, ou equivalentemente, perde aquele jogador que, em sua vez, não possuir movimento legal. Essa convenção nos ajudará a entender melhor quando um jogo acaba.

Com isso podemos pensar em exemplos de jogos que cabem e não cabem na definição dada. Assim, por exemplo, Xadrez é um jogo combinatório, enquanto Futebol não é um jogo combinatório (por vários motivos!). Jogos que envolvem cartas embaralhadas não são combinatórios, assim como jogos que envolvam sorte (afinal, o item *(iv)* é violado).

A motivação para tratarmos somente destes jogos é bem pragmática: a construção que formalizamos sobre Números e Jogos é de grande relevância ao estudo de jogos combinatórios, o que ocorre da seguinte maneira:

Podemos chamar o Jogo $G = \{G^L \mid G^R\}$ de uma posição de um jogo combinatório, sendo G^L o conjunto dos possíveis movimentos de um jogador L que transformarão a posição atual em uma nova posição, e G^R o conjunto dos possíveis movimentos de um jogador R que transformarão a posição atual em uma nova posição.

Desta forma podemos definir um conjunto de Jogos que determinam as posições terminais de um jogo combinatório, um Jogo que determina a posição inicial do jogo combinatório, e então estudarmos quais dos possíveis movimentos levará a posição incial para uma posição terminal favorável.

$$G_0 \xrightarrow{G_0^L} G_1 \xrightarrow{G_1^R} G_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{G_n^L} G_f$$

Neste diagrama, a posição inicial é G_0, e o primeiro jogador a fazer um movimento é L (ou o jogador Esquerda, digamos), que por meio de seu movimento nos levou ao jogo G_1. Depois disso o jogador R (ou Direita) por meio de um movimento nos leva ao jogo G_2. Após n movimentos, L faz seu movimento e chegamos a G_f, uma posição terminal que, a título de exemplo, faz com que L ganhe de R no jogo G.

Assim nos acostumamos com a ideia de que cada movimento leva o jogo à uma nova posição, e portanto um jogo nada mais é que um conjunto de posições, cada uma descrita por um conjunto de outras posições, e chegamos em tais posições por meio de movimentos, alguns do jogador L e outros de R.

5.2 Dominóando (Domineering)

Para começarmos nosso estudo sobre jogos vamos introduzir um jogo simples e estudar algumas de suas posições e os Jogos que são associados a cada uma delas.

Dominóando (Domineering)

Essa variação de dominó é jogada entre dois oponentes somente. Além disso, em sua vez, o jogador Esquerda (L) só pode colocar peças de dominó na vertical, enquanto Direita (R) só pode as colocar na horizontal. O "tabuleiro" em que jogaremos é decidido antes de começarmos o jogo, podendo variar infinitamente, e perde o jogador que não for capaz de colocar uma peça no tabuleiro. Essa ideia de não possuir tabuleiro fixo para jogarmos irá nos servir de pivô no estudo de nossos jogos, afinal, estamos interessados em "dissecar" jogos mais complexos analisando primeiramente posições mais simples do mesmo jogo.

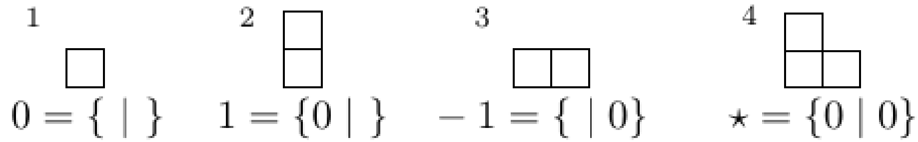

Figura 2: Posições simples de *Dominóando* e seus Jogos associados.
Fonte: Autoral

Para justificarmos os Jogos associados a cada uma das posições olhamos primeiramente para as posições finais do jogo que estamos estudando. Nesse caso as posições finais são poucas (de fato, são só duas), a posição 1 na figura acima e a posição "vazio", sem espaço algum para peças de dominó. A cada uma das posições finais associamos o Jogo $0 = \{\ \mid\ \}$, pois nem L nem R podem fazer nenhum movimento legal (por definição de posição terminal).

Após conhecermos os "valores" de cada posição final nosso próximo passo é nomear jogos nos quais L e R podem, com um movimento, transformar a posição atual nas posições cujos valores já conhecemos. Os jogos 2, 3 e 4 na figura são os jogos que conseguimos nomear. Em 2, L pode colocar uma peça de dominó na vertical e transformar a posição em 0, representamos esse fato dizendo que a posição 2 tem Jogo associado $\{0 \mid\ \}$, que já vimos ser um Número de valor 1. Caso análogo acontece em 3, posição em que somente R possui movimento válido.

Para analisarmos o valor de 4 notamos que o jogador que começar, seja L ou R, pode, com um movimento, ir para a posição terminal 1. Isso quer dizer que o Jogo associado deve ser da forma $\{0 \mid 0\}$, por motivos óbvios. Já vimos que esse Jogo não é um Número, mas tal Jogo representa perfeitamente a posição 4. Dizemos ainda que este Jogo é do tipo "quem começa, ganha", nomenclatura justificada pelo raciocínio desenvolvido neste parágrafo.

Agora que sabemos o valor de quatro posições (cinco se contarmos a posição vazio) já podemos começar a analisar posições mais complicadas:

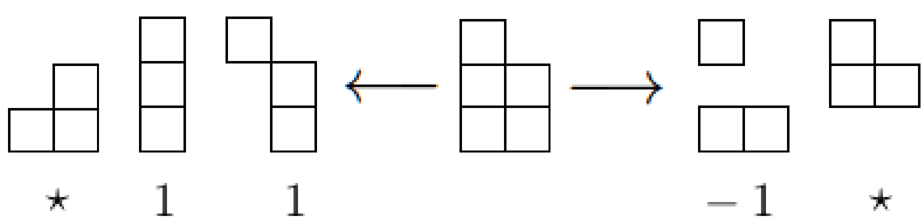

Figura 3: Uma posição P mais complicada de *Dominóando* e as posições que podem surgir de movimentos de L (à esquerda) e R (à direita).
Fonte: Autoral

Podemos representar essa posição por $P = \{\star, 1, 1 \mid -1, \star\}$. Podemos, a princípio, notar que $\{\star, 1, 1\} = \{\star, 1\}$ em termos de conjunto. Agora vamos pensar nessa posição na perspectiva de L. Podemos fazer um movimento para $\star$ ou 1. Se escolhermos $\star$, já sabemos o que acontece: iremos perder, assim, fica fácil perceber que nossa única opção satisfatória é 1. Neste caso dizemos que $\star$ é uma *opção dominada* por 1. Fenômeno parecido também ocorre com R em relação à $\star$ e -1.

Assim podemos reduzir a posição P à $\{1 \mid -1\}$. Nesse jogo ambos jogadores gostariam de começar, pois ambos possuem movimentos que irão os garantir a vitória, ou seja, em P, "quem começa, ganha".

P está na mesma família de Jogos de $\star$, que possuem propriedades interessantes. $\star$, por exemplo, obedece as relações $-x \leqslant \star \leqslant x$, para todo $x > 0$. Mas $\star$ não pode ser comparado com 0. Explicitamos este fato dizendo que $\star$ é *confuso* com o 0.

$P = \{1 \mid -1\}$ por sua vez, obedece as relações $-x \leqslant P \leqslant x$ para todo $x > 1$, mas P é *confuso* com todo o intervalo $[-1, 1]$.

Este processo empregado para descobrirmos o Jogo associado à P será frequentemente utilizado em nosso estudo de outros jogos combinatórios. Primeiramente veremos todos movimentos possíveis de uma posição, depois eliminaremos opções dominadas, e então veremos o real valor da posição.

Estudo de *Dominóando* atualmente

Atualmente o estudo de *Dominóando* é focado em descobrir o valor de posições grandes, como uma grade 8×8, 9×9, etc. com o uso de análise computacional, apesar de progresso também ser feito com teorias matemáticas[16].

6 Nim

6.1 O jogo de Nim

O jogo de Nim é jogado com pilhas de varetas entre dois jogadores que, em sua vez, têm como movimento válido escolher uma das pilhas com varetas e remover um número não-nulo de varetas desta pilha. Perde o jogador que, em sua vez, não possuir um movimento válido.

A cada posição de Nim podemos associar um Jogo da seguinte maneira: em um Jogo $\{L \mid R\}$, chamamos de L os movimentos válidos do jogador "da esquerda", e R os movimentos válidos do jogador "da direita".

O jogo de Nim é dito imparcial, cuja definição segue:

Definição 6.1. ***(Jogo Imparcial)***
Um Jogo G é dito imparcial se, e somente se, para toda posição $P = \{L \mid R\}$ de G, tem-se $L = R$ (como igualdade de conjuntos).

Informalmente, um jogo é imparcial se, a qualquer momento, L ou R podem fazer as mesmas jogadas sempre.

Para jogos imparciais utilizaremos uma notação mais limpa e simples para representar um Jogo G qualquer, e usaremos uma notação especial para representar algumas posições específicas a Nim:

Nota 6.1. ***(Representação de Jogos Imparciais e Nim)***
Seja $G = \{L \mid R\}$ um jogo imparcial, notaremos a posição G por $G = \{L\}$.
Seja G uma posição de Nim com n pilhas, cada uma delas com k_i varetas ($k_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$). Representaremos G por $(k_0, k_1, \ldots, k_n)$.

[16] http://webdocs.cs.ualberta.ca/ games/domineering/updated.html (2017) possui resultados atualizados até grades 11×30.

A título de exemplo, estudemos algumas posições simples de Nim, suas representações e seus Jogos associados.

Exemplo 6.1. ***(Alguns Jogos usados para jogos de Nim)***

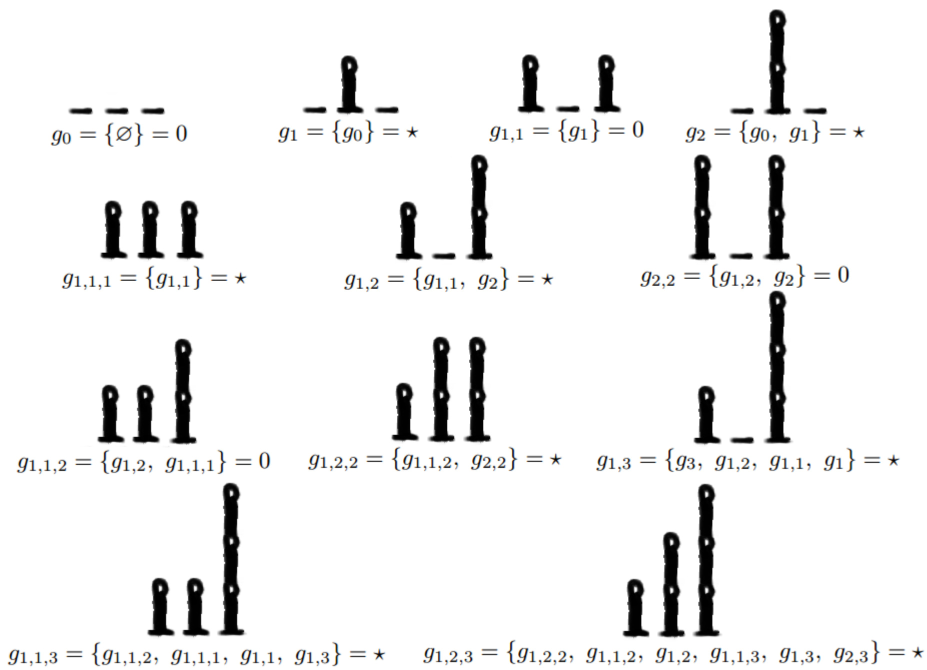

Figura 4: Algumas posições de Nim e seus Jogos associados.
Fonte: Autoral

A fim de justificar os nomes dos Jogos na figura acima notemos que $\star = \{0 \mid 0\} = \{0\}$, e daí damos o nome de $\star 2$ ao Jogo imparcial $\{\star\}$. De forma mais geral temos

$$\star\alpha = \{\star\beta\}_{\beta<\alpha},$$

ou seja, $\star\alpha$ é o nome dado ao Jogo em que um movimento legal é ir para qualquer Jogo $\star\beta$, para todo $\beta < \alpha$. Esta nomenclatura será usada para nomear qualquer Jogo imparcial[17].

6.2 Soma-Nim e o estudo de Nim

Uma partida de Nim pode, a princípio, ter n pilhas de varetas, cada uma com k_i varetas; logo, uma pergunta natural é saber como computar o valor de uma posição G qualquer de Nim.

Para isso definiremos uma operação chamada Soma-Nim (representada por $+_2$). A motivação de tal operação é notar que se $\star a$ e $\star b$ são posições de Nim, então o valor da posição $\star a + \star b$ também deve ser uma posição de Nim, onde a soma usada aqui indica uma nova posição $\star n$ cujos

[17] A nomenclatura pode ser empregada para quaisquer ordinais α e β. A título de exemplo, $\star\omega + 1 = \{\star\omega\}$.

movimentos válidos são movimentos que seriam válidos tanto em $\star a$ quanto em $\star b$.

Um fato importante para melhor intuir o leitor sobre $+_2$ é notar que ao se jogar a posição de Nim (k, k), com $k > 0$, deve-se vencer sempre o segundo jogador. De fato, se o primeiro jogador remover k_0 varetas de uma das pilhas, basta o segundo jogador remover k_0 varetas da outra pilha, retornando o jogo ao *status quo* na posição $(k - k_0, k - k_0)$ e repetir tal procedimento até que se tenha zero varetas em ambas as pilhas. Dizemos assim que uma posição dessas tem valor 0, e é portanto uma posição do tipo "quem começa, perde". Deixamos ao leitor encontrar o valor de uma posição de Nim do tipo $(k, k + p)$, para $k, p > 0$.

Exemplo 6.2. ***Avaliando a posição*** $(k, k + p)$
Ao se jogar a posição $(k, k + p)$ com $k, p > 0$, a estratégia vencedora seria remover p varetas da pilha $k + p$.
De fato, se qualquer outra quantidade $q \neq p$ for removida de qualquer uma das pilhas, restará a posição $(k - q, k + p)$ ou $(k, k + p - q)$, donde então no primeiro caso o segundo jogador pode fazer o movimento que leva à posição $(k - q, k - q)$ removendo $p + q$ varetas da segunda pilha (e daí o jogo torna-se uma vitória ao segundo jogador, o que é uma derrota para o primeiro). No segundo caso, o segundo jogador pode fazer o movimento que leva à posição (k, k) removendo $p - q$ varetas da segunda pilha (novamente sendo uma derrota para o primeiro jogador).
Portanto o único movimento que garante uma vitória ao primeiro jogador é, de fato, remover p varetas da segunda pilha. O valor da posição $(k, k + p)$ se tornará aparente ao definirmos a operação $+_2$.

Assim nota-se que existe uma certa "paridade" em pilhas de Nim de mesma quantidade de varetas. Sabendo disso e usando nossa definição para o valor de uma única pilha de Nim temos a seguinte definição:

Definição 6.2. ***(Soma-Nim)***
Sejam a, b inteiros não-negativos cujas representações em base 2 são $(a)_2 = a_r \cdots a_1 a_0$ e $(b)_2 = b_s \cdots b_1 b_0$ respectivamente, definimos $a +_2 b$ como sendo o número

$$(c)_2 = c_r \cdots c_s \cdots c_1 c_0,$$

onde

$$c_i = \begin{cases} 1, & se\ a_i = 1\ e\ b_i = 0\ ou\ a_i = 0\ e\ b_i = 1; \\ 0, & se\ a_i = 0\ e\ b_i = 0\ ou\ a_i = 1\ e\ b_i = 1. \end{cases}$$

Donde então a representação decimal de c é $c = c_0 + 2 \cdot c_1 + \cdots + 2^s \cdot c_s + \cdots + 2^r c_r$.

Uma forma equivalente de definir a Soma-Nim de dois números a e b é fazer a soma usual de $(a)_2$ e $(b)_2$ sem "carregar expoentes" durante a soma. Isto é, caso $a_i = b_i = 1$, então $c_i = 0$ mas c_{i+1} não recebe $+1$ em sua soma. Essa operação é equivalente à operação XOR, usada em contextos computacionais.

Agora definida $+_2$ fica bem claro que, de fato, $k +_2 k = 0$ para todo $k \geqslant 0$, e portanto o elemento oposto de x é ele mesmo e o elemento neutro de $+_2$ é de fato 0.

Assim sendo, para computarmos o valor de uma posição $K = (k_0, k_1, \ldots, k_n)$ basta desenvolver a soma $k_0 +_2 k_1 +_2 \cdots +_2 k_n = k$. Neste caso, representaremos por $[K] = k$ o valor da Soma-Nim da posição K. Passaremos a usar $+$ ao invés de $+_2$ para uma notação menos carregada. A seguir temos um exemplo de tal soma sendo feita.

Lema 6.1. ***(Algumas propriedades de*** $+_2$***)***
Sejam $a, b \geqslant 0$*, então:*

(i.) *Dados* a *e* b *existe um, e somente um,* c *tal que* $a +_2 c = b$.

(ii.) $a +_2 b = c \Longrightarrow a +_2 c = b$ *e* $b +_2 c = a$.

(iii.) $a +_2 b > c \Longrightarrow a +_2 c < b$ *ou* $b +_2 c < a$.

Demonstração:

(i.) Pela definição de $+_2$ notamos que se $(c)_2 = c_s \cdots c_1 c_0$ tem seu i-ésimo algarismo $c_i = 0$ ou $c_i = 1$. Além disso $(a)_2 = a_r \cdots a_1 a_0$ tem duas possibilidades para seu i-ésimo algarismo a_i. Quaisquer sejam estes algarismos, temos somente uma possibilidade para b_i. Isto é,

$$\begin{array}{lcll} a_i = 0 & \text{e} & c_i = 0 & \Longrightarrow \quad b_i = 0 \\ a_i = 0 & \text{e} & c_i = 1 & \Longrightarrow \quad b_i = 1 \\ a_i = 1 & \text{e} & c_i = 0 & \Longrightarrow \quad b_i = 1 \\ a_i = 1 & \text{e} & c_i = 1 & \Longrightarrow \quad b_i = 0 \end{array}$$

concluindo nossa demonstração.

(ii.) Por (i) existe somente um x tal que $a +_2 x = b$. Mostremos que $x = a +_2 b$ satisfaz essa igualdade. Com efeito, $a +_2 (a +_2 b) = (a +_2 a) +_2 b = 0 +_2 b = b$.
Da mesma forma, existe somente um y tal que $b +_2 y = a$. Se $y = b +_2 a$, então $b +_2 (b +_2 a) = (b +_2 b) +_2 a = 0 +_2 a = a$.

(iii.) como $a +_2 b > c$, então, por *(i)* existe um único $d > 0$ tal que $a +_2 b = c +_2 d$. Sendo assim, por *(ii)*, $b = a +_2 c +_2 d$.
Sem perda de generalidade, suponhamos $a > b$ (o caso $a = b$ não pode ocorrer, pois do contrário não existiria c tal que $a +_2 a = 0 > c$, contradizendo a hipótese).
Como $b = a +_2 c +_2 d$, se $c_k = 0$, então $d_k = 1$ e, da mesma forma, se $c_k = 1$, então $d_k = 0$.
Se $d < a$, então $a +_2 d < a$, e portanto $b +_2 c = a +_2 d < a$, concluindo nossa demonstração.
Caso contrário, como $d \geqslant a$, temos que $a +_2 c = b +_2 d$,

□

Óbviamente uma posição P qualquer de Nim terá valor $[P] = 0$ ou $[P] \neq 0$. Em termos de notação, não iremos mais utilizar $+_2$ para indicar a soma-Nim, preferindo apenas $+$. Dito isso, temos a seguinte proposição:

Proposição 6.1. ***(Existência de movimento em Nim)***
Seja $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *uma posição de Nim não-nula qualquer.*

i. *Se* $[A] = 0$*, então existe movimento legal removendo-se* r *varetas da pilha* a_i *tal que* $A' = (a_0, a_1, \ldots, a'_i, \ldots, a_n)$ *tem valor* $[A'] \neq 0$.

ii. *Se* $[A] \neq 0$*, então existe movimento legal removendo-se* s *varetas da pilha* a_j *tal que* $A'' = (a_0, a_1, \ldots, a'_j, \ldots, a_n)$ *tem valor* $[A''] = 0$*.*

Demonstração:

i. Seja $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ posição não-nula tal que $[A] = 0$. Então $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$. Sendo $a_i = a'_i + r$, então $a'_i = a_i + r$, e, sendo $r \neq 0$, teremos $a'_i \neq a_i$, e, finalmente, a soma-Nim de $a_0 + a_1 + \ldots + a'_i + \ldots + a_n \neq 0$.

A demonstração de *ii.* pode ser vista de forma lúdica no Volume 1 de (BERLEKAMP; CONWAY; GUY, 1982). □

No primeiro Volume de (BERLEKAMP; CONWAY; GUY, 1982), além de algumas proposições, muitos mais exemplos são dados com o intuito final de deixar o leitor preparado para descobrir em apenas alguns segundos se deveria ser o primeiro a fazer um movimento ou o segundo para garantir a vitória.

Com essa breve introdução ao jogo de Nim, acompanhada dos exemplos e demonstrações aqui feitas pode-se começar a explorar jogos cada vez mais interessantes de Nim, o com pilhas de tamanhos infinitos, por exemplo. Nim, apesar de simples, oferece um ótimo ponto de partida para o estudo de Jogos da família de $\star$.

6.3 Desmata-mata restringido (Hackenbush restrained)

Estudaremos agora uma variedade do jogo *Desmata-mata* (*Hackenbush*) chamado *Desmata-mata restringido*. Este jogo possui algumas propriedades e generalizações interessantes que serão utilizadas no futuro neste projeto.

Um jogo de *Desmata-mata restringido* é jogado em uma figura composta de varetas pretas e brancas que são ou unidas a uma outra vareta ou conectada ao "chão", representado por uma linha pontilhada.

Em sua vez, cada jogador escolhe uma vareta de sua cor (pretas para L e brancas para R) e removem a vareta escolhida. Quando uma vareta é removida também são removidas do jogo todas as varetas conectadas a ela que não estão mais em contato com o chão. Perde o jogador que não puder remover nenhuma vareta em sua vez.

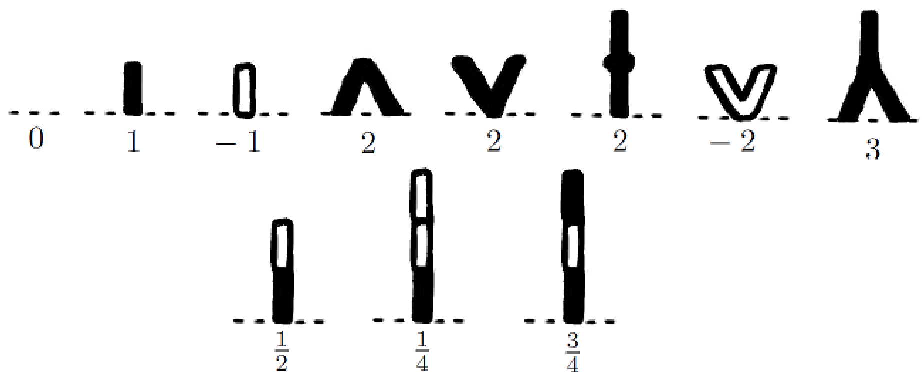

Figura 5: Alguns valores de jogos simples de *Desmata-mata restringido*.
Fonte: Autoral

Generalizando, uma figura com apenas n varetas pretas tem valor n pois L pode fazer n movimentos consecutivos removendo uma vareta em cada um deles, ganhando com n movimentos de vantagem. Analogamente, uma figura com apenas n varetas brancas tem valor $-n$.

Uma figura com mais varetas pretas beneficia L, porém quanto mais distante do chão ela estiver (ou seja, quanto mais varetas estiverem conectadas abaixo dela), menor é essa vantagem, apesar de ainda sim existir.

Podemos demonstrar duas proposições sobre *Desmata-mata restringido* de forma indutiva, uma com a ajuda da outra:

Proposição 6.2. ***(Valores de Desmata-mata restringido)***
Em um jogo $G = \{G^L \mid G^R\}$,

(i) Ao se remover uma vareta preta, o valor de G é estritamente diminuído; ao se remover uma branca o valor é estritamente aumentado.

(ii) O valor de todo jogo G é um número.

Demonstração:

(i) Se L remove uma vareta preta teremos um novo jogo G^L que, indutivamente, é um número por (ii), o mesmo ocorre se R remove uma vareta branca.

Como G^L e G^R são números, então G também é um número, e portanto $G^L < G < G^R$. Assim, todo movimento de L necessariamente diminui o valor de G (e todo movimento de R necessariamente aumenta o valor de G).

(ii) Por (i), se L jogar (indo de G para G^L), então o valor de G será diminuído, ou seja $G^L < G$. Se R jogar o valor de G será aumentado, ou seja $G < G^R$. Assim temos $G^L < G^R$, e portanto existe um número $G = \{G^L \mid G^R\}$.

$\square$

Mesmo após provarmos isso, não possuímos nenhuma regra simples para descobrir o número associado à uma figura arbitrária de *Desmata-mata restringido* sem, de certa forma, "jogar" o jogo, porém possuímos uma teoria completa para árvores[18] quaisquer.

Seja P uma árvore qualquer, então o número associado à posição Q composta da árvore P conectada por cima à uma vareta preta que, por sua vez, está conectada ao chão, depende somente do número associado à P. Se o número associado à P for x, então o número associado a Q é o número $1 : x$, definido da seguinte forma:

Se x for um número real, o número $1 : x$ (chamado *soma ordinal* de 1 e x) tem o primeiro valor da série

$$\frac{x+1}{1}, \quad \frac{x+2}{2}, \quad \frac{x+3}{4}, \quad \frac{x+4}{8}, \quad \frac{x+5}{16}, \quad \ldots$$

para o qual o *numerador* da expressão dada excede 1 (nos referenciamos ao numerador $x+n$ da expressão, não o numerador da fração reduzida $x + n/2^{n-1}$).

Similarmente, o número $(-1) : x$ (sempre negativo) terá o primeiro valor da série

$$\frac{x-1}{1}, \quad \frac{x-2}{2}, \quad \frac{x-3}{4}, \quad \frac{x-4}{8}, \quad \frac{x-5}{16}, \quad \ldots$$

cujo numerador é excedido por -1. Esse valor será o número associado à posição R definida pela composição da árvore P conectada por cima à uma vareta branca que está conectada ao chão.

Com a função $1 : x$ (e $(-1) : x$) e o fato de que uma árvore conectada em um mesmo nódulo por duas outras árvores P de valor x e Q de valor y tem valor $x + y$ (como no quinto jogo da Figura 5), temos as ferramentas necessárias para decidir o valor de qualquer árvore.

Para árvores mais complexas de Desmata-mata Restringido, recomendamos, novamente, que o leitor procure o Volume 1 de (BERLEKAMP; CONWAY; GUY, 1982). A versão irrestrita de Desmata-mata (na qual as varetas não possuem cores e podem ser removidas por qualquer jogador também é explorada nessa literatura, e oferece grande desafio e a introdução de complexos conceitos usados em seu estudo, explorando a família dos números ω, bem como outras famílias de Jogos com propriedades algébricas interessantes.

[18] Uma *árvore* de *Desmata-mata restringido* é uma sequência de varetas que se conectam ao chão somente em uma das varetas.

7 Conclusão

O que aqui vimos nos âmbitos de ***No*** e Jogos é apenas um ponto de partida para a exploração de muitas outras propriedades e aplicações possíveis para estas extensas Classes. Encorajamos o leitor a seguir a caminhada de exploração dos Jogos de forma mais rigorosa em (CONWAY, 1976), ou mais lúdica em (BERLEKAMP; CONWAY; GUY, 1982). Winning Ways for your Mathematical Plays é vasto em explorar diferentes jogos, cada um com diferentes famílias de Jogos que são úteis, bem como diferentes ferramentas para analisá-los.

Conforme chegamos ao final desta leitura, nossa maior esperança é ter intrigado o leitor ao mostrar uma diferente construção matemática, além de tê-lo preparado para continuar sua posterior leitura. Finalmente, terminamos com algo que já penso a muito tempo: apesar de se sua incepção ser lúdica, ***No*** demonstra uma profundidade e aplicação digna de seu nome: Surreal.

8 Bibliografia

Referências

BERLEKAMP, E. R.; CONWAY, J. H.; GUY, R. K. **Winning Ways for your Mathematical Plays**. London, UK: Academic Press, 1982.

CONWAY, J. H. **On Numbers and Games**. [S.l.]: A K Peters/CRC Press, 1976.